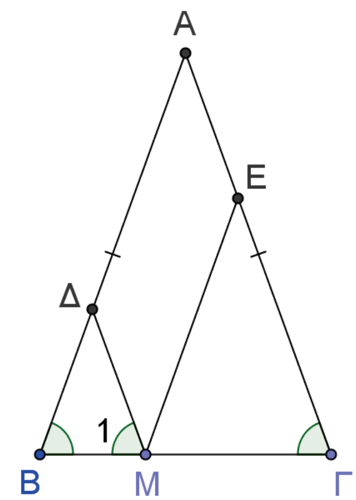
Α1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημείο Μ της βάσης του ΒΓ.Φέρουμε ΜΕ//ΑΒ (Ε σημείο του ΑΓ) και ΜΔ//ΑΓ (Δ σημείο του ΑΒ).Να αποδείξετε ότι ΜΔ+ΜΕ=ΑΒ.



Λύση:

Επειδή ΑΒ=ΑΓ θα είναι και $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ **(1)**

Αφού ΜΔ//ΑΓ θα είναι $\hat{\Gamma}=\hat{M}_1$ **(2)** ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Από **(1)** και **(2)** $\hat{M}_1=\hat{B}$ οπότε ΜΔ=ΒΔ.

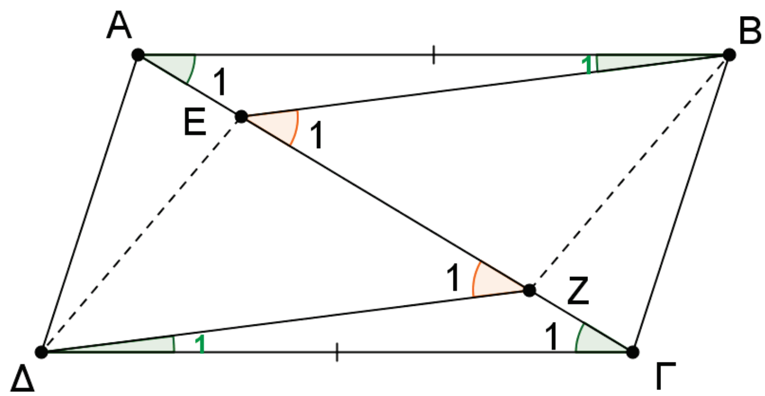
Το τετράπλευρο ΑΕΜΔ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΜΕ=ΔΑ

Τελικά ΜΔ+ΜΕ=ΒΔ+ΔΑ=ΑΒ

Α2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε σημείο της ΑΓ. Φέρουμε ΔΖ//ΒΕ (Ζ σημείο του ΑΓ).

Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΖ.

Λύση:



Είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΑΓ.

Είναι $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΒ και ΔΖ που τέμνονται από την ΕΖ.

Αφού οι $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΕΒ

ισχύει $\hat{E}_1 = \hat{A}_1 + \hat{B}_1$

Αφού οι $\hat{Z}_1$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΕΒ

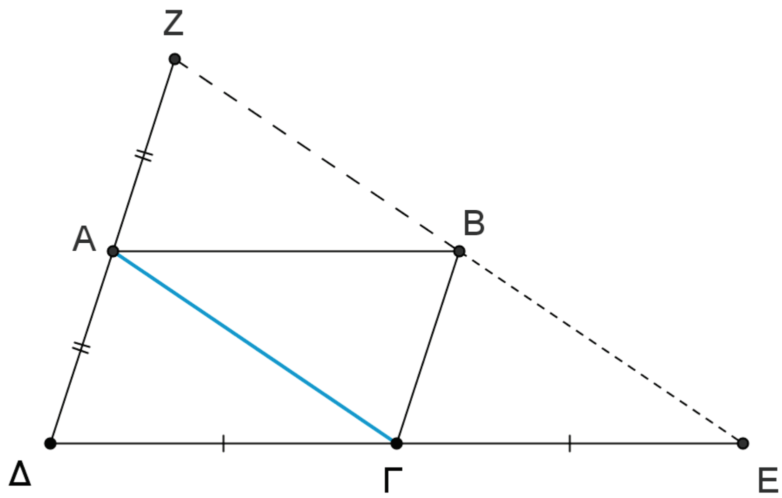
ισχύει $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1$

Από $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$ παίρνουμε $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 \Leftrightarrow \hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Τα τρίγωνα λοιπό ΑΒΕ και ΓΔΖ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 \\ AB = \Gamma\Delta \text{ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου} \\ \hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ ΓΠΓ είναι ίσα οπότε θα έχουν ΕΒ=ΔΖ.Επειδή από τα δεδομένα είναι και ΕΒ//ΔΖ θα είναι από γνωστό κριτήριο ΕΒΖΔ παραλληλόγραμμο.

Α3. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ και τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΖ = ΔΑ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Β και Ε είναι συνευθειακά.



Λύση:

Φέρνουμε την ΑΓ.

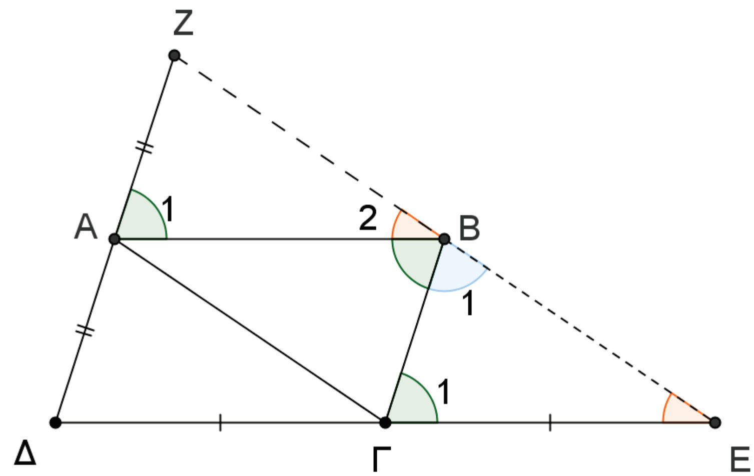
Είναι ΑΔ=ΑΖ και ΑΔ=ΒΓ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.Αρα ΑΖ=ΒΓ και επειδή και ΑΖ//ΒΓ από γνωστό κριτήριο το ΖΒΓΑ είναι παραλληλόγραμμο οπότε θα έχει ΖΒ//ΑΓ

Είναι ΔΓ=ΓΕ από δεδομένα και ΑΒ=ΔΓ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

Αρα ΑΒ=ΓΕ και επειδή και ΑΒ//ΓΕ από γνωστό κριτήριο το ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο οπότε θα έχει ΒΕ//ΑΓ

Ομως από το Β διέρχεται μοναδική παράλληλος προς την Β (αίτημα παραλληλίας) οπότε οι ΖΒ και ΒΕ ταυτίζονται δηλαδή τα Ζ, Β, Ε είναι συνευθειακά.

Β τρόπος:



ΑΖ=ΑΔ=ΒΓ (η πρώτη ισότητα από δεδομένα και η δεύτερη επειδή οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες)

ΑΒ=ΔΓ=ΓΕ (η πρώτη ισότητα επειδή οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες και η δεύτερη από δεδομένα)

$\hat{A}_1 = \hat{\Delta}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά

$\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_1$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά

Αρα $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$

Τα τρίγωνα ΑΖΒ και ΒΓΕ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AZ = B\Gamma \\ \hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 \\ AB = \Gamma E \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε θα έχουν και } \hat{B}_2 = \hat{E}$$

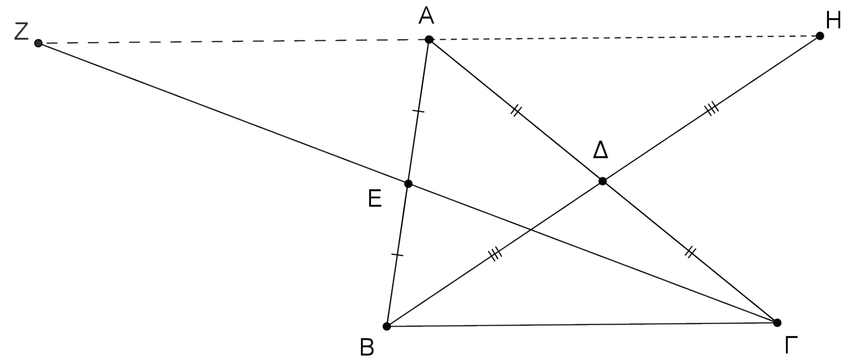
$\hat{B} = \hat{\Gamma}_1$ ως εντός εναλλάξ.

Αρα $\hat{B}_2 + \hat{B} + \hat{B}_1 = \hat{E} + \hat{\Gamma}_1 + \hat{B}_1 = 180°$ (το άθροισμα γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180 μοίρες)

Α4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των **διαμέσων** ΒΔ και ΓΕ παίρνουμε σημεία Η και Ζ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΔΗ = ΒΔ και ΖΕ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

i) ΑΗ = ΑΖ,

ii) τα σημεία Ζ, Α και Η είναι συνευθειακά.



Λύση:

● Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΖΑΓΒ διχοτομούνται επομένως αυτό είναι παραλληλόγραμμο, επομένως ΑΖ=//ΒΓ **(1)**

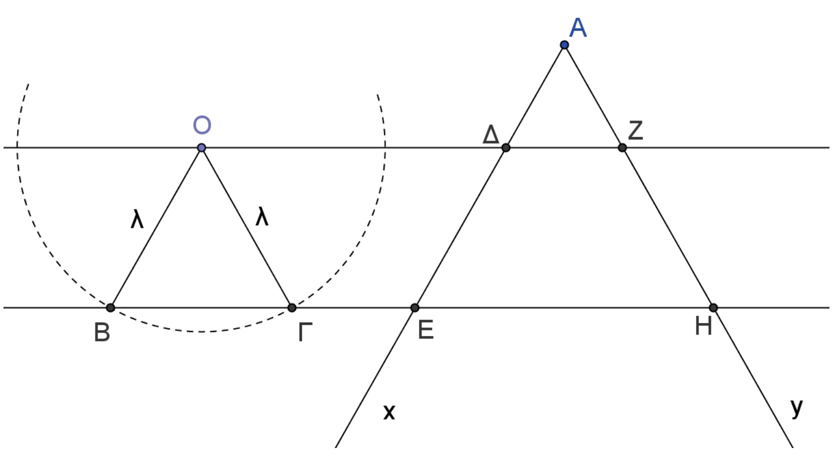
● Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΗΓΒ διχοτομούνται επομένως αυτό είναι παραλληλόγραμμο, επομένως ΑΗ=//ΒΓ **(2)**

i) Από **(1)** και **(2)** συμπεραίνω αρχικά ότι ΑΖ=ΑΗ.

ii) Επίσης από το αίτημα παραλληλίας υπάρχει μοναδική παράλληλη από το Α προς την ΒΓ, επομένως οι ΑΖ και ΑΗ ταυτίζονται οπότε τα σημεία Α, Ζ, Η είναι συνευθειακά.

Α5.Από σημείο Α να φέρετε τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών με τρόπο, ώστε το μεταξύ των παραλλήλων τμήμα της να είναι ίσο με δοσμένο τμήμα λ.

Λύση:



Με κέντρο τυχαίο σημείο Ο πάνω στην μιά από τις παράλληλες, γράφουμε κύκλο με ακτίνα λ που τέμνει την άλλη παράλληλο στα Β και Γ.

Στην συνέχεια από το Α φέρουμε τις παράλληλες προς τις ΟΒ και ΟΓ ευθείες.

Επειδή τα τετράπλευρα ΟΔΕΒ και ΟΖΗΓ είναι παραλληλόγραμμα, είναι ΔΕ=ΟΒ=λ και ΖΗ=ΟΓ=λ