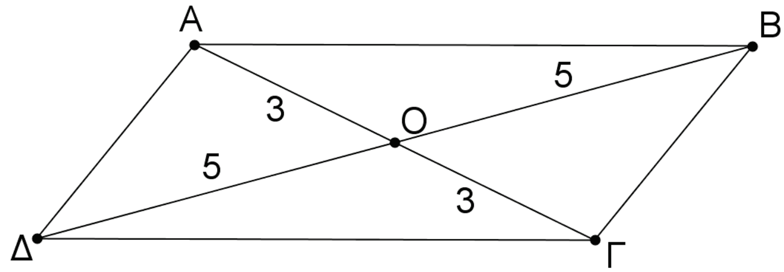
§ 5.1-5.2 Ερωτήσεις Κατανόησης (version 13-2-2016)

Κ1. *Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα, ποια όχι και γιατί;*

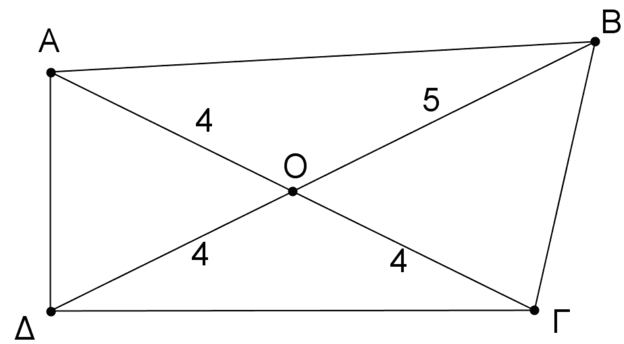
Απάντηση:

i) Το πρώτο είναι γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται

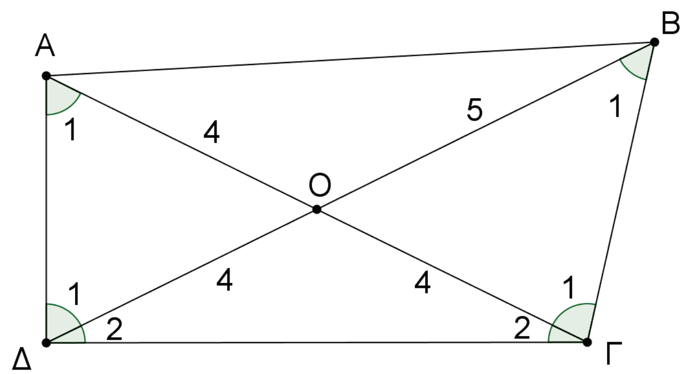


ii) το δεύτερο δεν είναι όπως μπορούμε να δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο.

Εστω ότι ήταν παραλληλόγραμμο.Τότε οι διαγώνιοί του θα διχοτομούνταν που είναι άτοπο γιατί δεν διχοτομούνται.



2^{ος} τρόπος:



► Στο τρίγωνο ΑΟΔ είναι ΟΑ=ΟΔ οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$

Στο τρίγωνο ΔΟΓ είναι ΟΔ=ΟΓ οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_2 + \hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_2 + \hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 180° - \hat{\Delta}$$

$$\Leftrightarrow 2\hat{\Delta} = 180° \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 90° \ \mathbf{(1)}$$

► Στο τρίγωνο ΑΟΓ είναι ΟΔ=ΟΓ οπότε $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Delta}_2$

Στο τρίγωνο ΟΒΓ είναι ΟΒ>ΟΓ οπότε $\hat{\Gamma}_1 > \hat{B}_1$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 > \hat{B}_1 + \hat{\Delta}_2 \Leftrightarrow \hat{\Gamma} > \hat{B}_1 + \hat{\Delta}_2 \Leftrightarrow \hat{\Gamma} > 180° - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} > 180° \Leftrightarrow \hat{\Gamma} > 90° \ \mathbf{(2)}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

$$\hat{\Gamma} + \hat{\Delta} > 90° + 90° \Leftrightarrow \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} > 180° \Leftrightarrow 360° - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) > 180° \Leftrightarrow 360° - 180° > \hat{A} + \hat{B} \Leftrightarrow 180° > \hat{A} + \hat{B} \Leftrightarrow$$

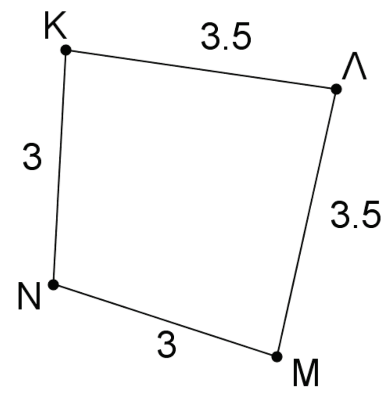
$$\hat{A} + \hat{B} < 180°$$

οπότε από Πρόταση IV συμπεραίνουμε ότι ΑΔ και ΒΓ τέμνονται (προς το μέρος της ΑΒ που βρίσκονται οι γωνίες).

Αρα το ΑΒΓΔ δεν είναι παραλληλόγραμμο.

Σημείωση: Φυσικά αρκεί το $\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}>180°$ για να δειχθεί ότι οι ΑΔ και ΒΓ τέμνονται αφού οι εντός και επί τα αυτά δεν είναι παραπληρωματικές.Ετσι δουλεύει και στην Πρόταση IV.

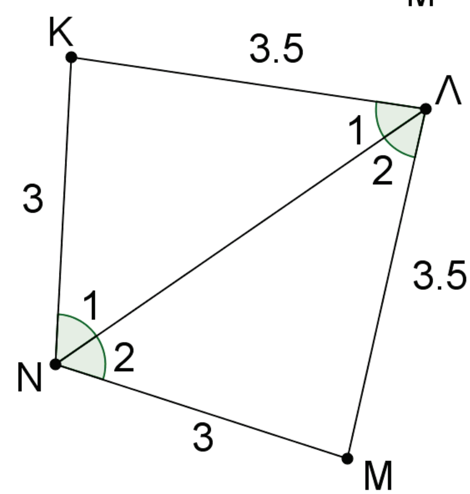
iii)



Το 3ο δεν είναι.Θα το αποδείξουμε με απαγωγή σε άτοπο.Εστω ότι ήταν.Τότε οι απέναντι πλευρές θα ήταν ίσες, άτοπο αφού δεν είναι.

2ος τρόπος

Αν φέρω την διαγώνιο ΝΛ είναι $\hat{N}_1>\hat{\Lambda}_1$ γιατί απέναντι απο άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.



Επίσης $\hat{N}_2>\hat{\Lambda}_2$ γιατί απέναντι απο άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.

Αρα προσθέτοντας κατά μέλη $\hat{N}>\hat{\Lambda}$ **(1)**

Από την ισότητα των τριγώνων ΚΛΝ και ΝΛΜ (ΠΠΠ) είναι $\hat{K}=\hat{M}$ **(2)** οπότε προσθέτοντας κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** έχουμε**:**

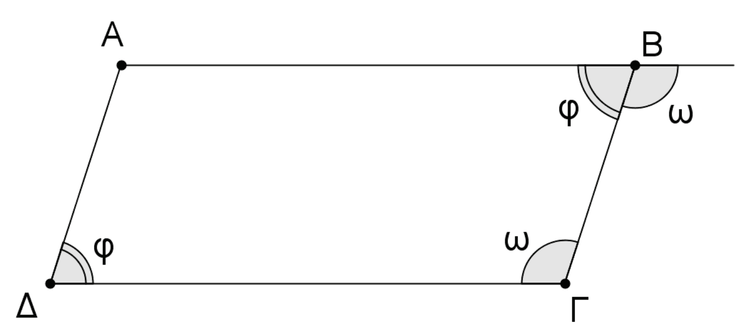
$$\hat{N}+\hat{K}>\hat{\Lambda}+\hat{M}\Leftrightarrow 360°-\left(\hat{\Lambda}+\hat{M}\right)>\hat{\Lambda}+\hat{M}\Leftrightarrow 360°-\left(\hat{\Lambda}+\hat{M}\right)>\hat{\Lambda}$$

$2\left(\hat{\Lambda}+\hat{M}\right)<360°\Leftrightarrow\hat{\Lambda}+\hat{M}<180°$ και από Πρόταση IV τέμνονται

iv)

Το 4ο είναι γιατί:

Αφού οι εντός εναλλάξ γωνίες ω είναι ίσες είναι ΑΔ//ΡΚ.

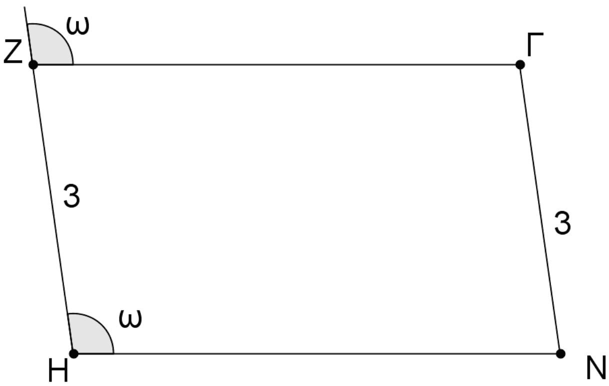


Επιπλέον όπως φαίνεται στην κορυφή Δ οι ω και φ είναι παραπληρωματικές οπότε οι ΑΡ και ΔΚ τεμνόμενες από την ΡΚ σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές, οπότε ΑΡ//ΔΒ.Το ΑΔΚΡ έχει λοιπόν τις απέναντί του πλευρές παράλληλες οπότε από τον ορισμό είναι παραλληλόγραμμο.

v)

Το 5ο δεν είναι γατί ναι μέν οι ΖΓ και ΗΝ είναι παράλληλες αφού σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες όμως θα έπρεπε να είναι ίσες και δεν δίνεται αυτό.

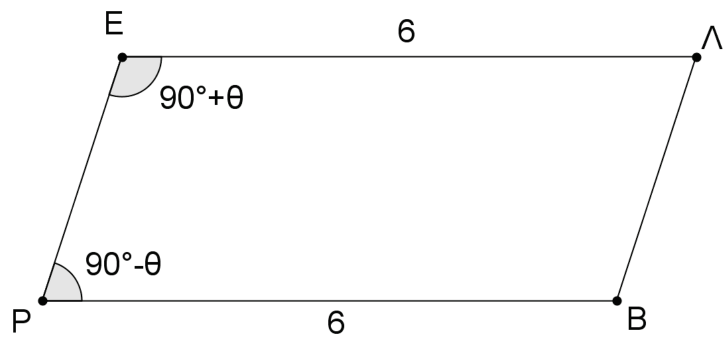
Γενικά το σχήμα αυτό είναι ισοσκελές τραπέζιο.



vi)

Το 6ο είναι παραλληλόγραμμο γιατί

$\hat{E}+\hat{P}=90°+\hat{\theta}+90°-\hat{\theta}=180°$ οπότε ΕΛ//ΡΒ.Επιπλέον μας δίνεται ότι ΕΛ=ΡΒ οπότε το ΕΛΡΒ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες άρα από κριτήριο **ii** είναι παραλληλόγραμμο.



Κ2. *Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο;*

Απάντηση:

1. Αν έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες (ορισμός)
2. Αν έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο ίσες.
3. Αν δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες
4. Αν οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο ίσες
5. Αν οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Κ3. *Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.*

Απάντηση:

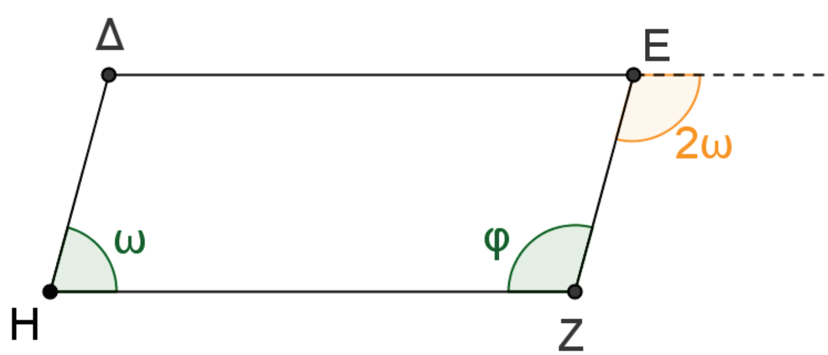
$\hat{\Gamma} = 180° - 75° = 105°$

Θα είναι $\hat{B} = 75°$ ως εντός εναλλάξ με την $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$

Επειδή οι απέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου είναι ίσες έχουμε:

$\hat{A} = 105°$ και $\hat{\Delta} = 75°$

Κ4. *Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.*



Απάντηση:

Αφού ΔΗ//ΕΖ εντός και επι τα αυτά ω και φ είναι παραπληρωματικές δηλαδή**:**

$\omega + \varphi = 180°$ **(1)**

Επειδή ΔΕ//ΗΖ οι εντός εναλλάξ 2ω και φ είναι ίσες:

$\varphi = 2\omega$ **(2)**

Αντικαθιστώ στην **(1)** και παίρνω $\omega + 2\omega = 180° \Leftrightarrow 3\omega = 180° \Leftrightarrow \omega = 60°$ οπότε από την **(2)** έχω $\varphi = 2 \cdot 60° = 120°$

K5. Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν:

i) Δύο απέναντι γωνίες είναι ίσες. ☐

ii) Οι διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές. ☐

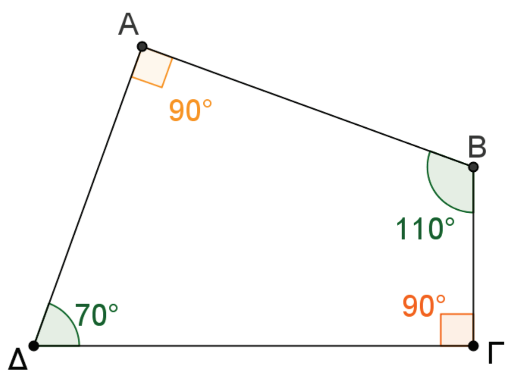
iii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες. ☐

iv) Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. ☐

(Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση).

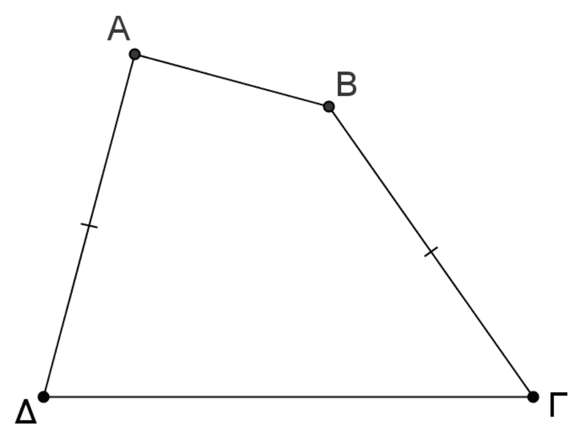
Λύση:

i) Οχι όπως φαίνεται απο το παρακάτω αντιπαράδειγμα.



ii) Ναι γιατί έτσι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.

iii) Οχι δεν αρκεί αυτό.Πρέπει επιπλέον οι πλευρές αυτές να είναι και παράλληλες ή εναλλακτικά και οι άλλες απέναντι πλευρές να είναι ίσες.



iv) Οχι τότε μπορεί να είναι τραπέζιο.