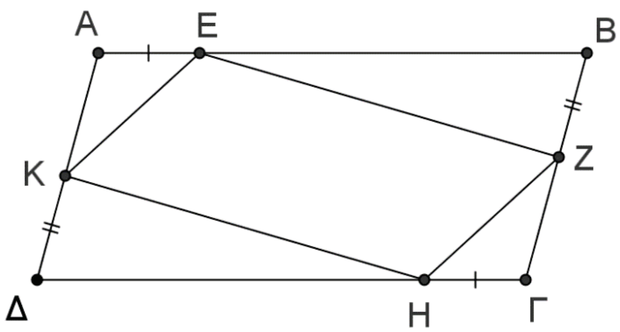
Σ1. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Κ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα ώστε ΑΕ = ΓΗ και ΔΚ= ΒΖ. Να αποδείξετε ότι

i) το τετράπλευρο ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο,

ii) οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΚΖ συντρέχουν.



Λύση:

● Γνωρίζουμε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες οπότε ΑΔ=ΒΓ και αφού μας δίνεται ότι ΔΚ=ΒΖ με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$\mathrm{A\Delta} - \mathrm{\Delta K} = \mathrm{B\Gamma} - \mathrm{BZ} \Leftrightarrow \mathrm{AK} = \mathrm{\Gamma Z}$

Τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΓΗΖ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{AE} = \mathrm{H\Gamma} \text{ από δεδομένα} \\ \hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma} \text{ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου} \\ \mathrm{AK} = \mathrm{\Gamma Z} \text{ όπως δείξαμε πιο πάνω} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ ΠΓΠ είναι ίσα οπότε θα έχουν και ΕΚ=ΓΗ **(1)**

● Γνωρίζουμε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες οπότε ΑΒ=ΔΓ και αφού μας δίνεται ότι ΑΕ=ΓΗ με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$\mathrm{AB} - \mathrm{AE} = \mathrm{\Delta\Gamma} - \mathrm{\Gamma H} \Leftrightarrow \mathrm{EB} = \mathrm{H\Delta}$

Τα τρίγωνα ΕΒΖ και ΗΔΚ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{K\Delta} = \mathrm{BZ} \text{ από δεδομένα} \\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Delta} \text{ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου} \\ \mathrm{EB} = \mathrm{\Delta H} \text{ όπως δείξαμε πιο πάνω} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ ΠΓΠ είναι ίσα οπότε θα έχουν και ΕΖ=ΚΗ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** το τετράπλευρο ΕΖΗΚ έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο ίσες, οπότε από γνωστό κριτήριο *(το (i) συγκεκριμένα)* είναι παραλληλόγραμμο.

ii) Αφού ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο η ΒΔ διέρχεται απο το μέσο της διαγωνίου ΑΓ

Αφού όπως δείξαμε ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο, η ΚΖ διέρχεται από το μέσο της ΕΗ.

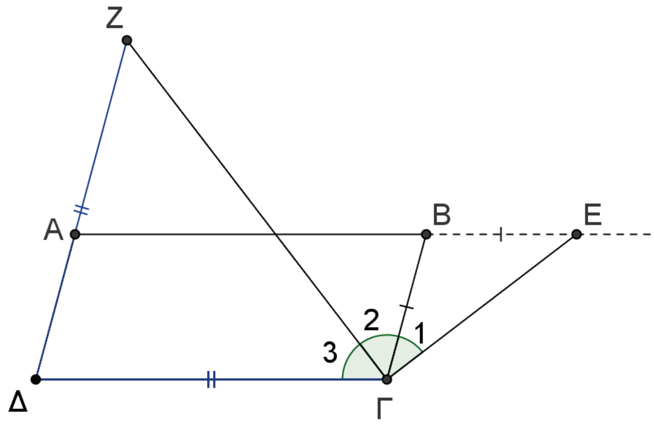
Αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι οι διαγώνιες ΑΓ και ΕΗ έχουν κοινό μέσο τότε θα έχουμε δείξει ότι και οι 4 ευθείες διέρχονται από το σημείο αυτό δηλαδή συντρέχουν.

Πράγματι το ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει ΑΕ=//ΓΗ οπότε οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΕΖ διχοτομούνται δηλαδή έχουν κοινό μέσο έστω Ο.

Αρα οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΚΖ συντρέχουν στο Ο.

Σ2. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και επί της ημιευθείας ΔΑ θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι ΖΓΕ = 90°.

Λύση:



Η γωνία $\hat{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΓΕ οπότε:

Η γωνία $\hat{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΓΕ οπότε:

$$\hat{B}=\hat{\Gamma}_1+\hat{E}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\hat{B}=\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_1\Leftrightarrow\hat{B}=2\hat{\Gamma}_1\Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}_1=\hat{B}$$

$$\Leftrightarrow\hat{\Gamma}_1=\frac{\hat{B}}{2}$$

$\hat{\Gamma}_2=\hat{Z}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ

Ομως το τρίγωνο ΔΖΓ είναι ισοσκελές οπότε

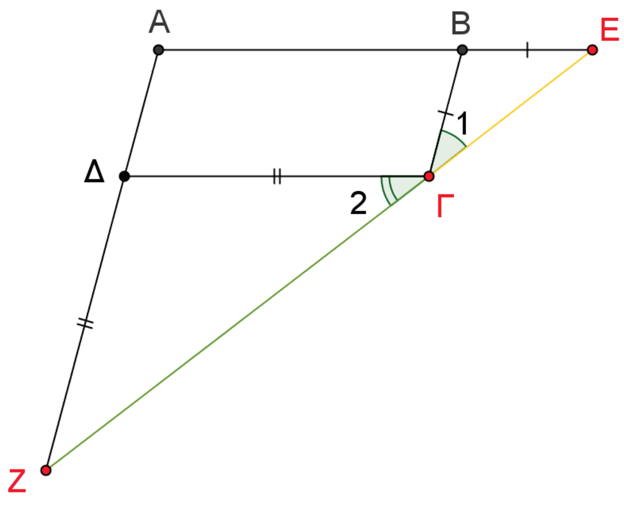
$$\hat{Z}=\hat{\Gamma}_3$$

οπότε $\hat{\Gamma}_2=\hat{\Gamma}_3=\frac{\hat{\Gamma}}{2}$.

Πλέον $\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_2=\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=\frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}=\frac{180°}{2}=90°$ (Οι $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επι τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΒΓ).

Σ3. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και την ΑΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

Λύση:



Φέρνω το τμήμα ΓΖ και το ΓΕ.Αρκεί να δείξω ότι η γωνία ΕΓΖ είναι ευθεία.

$\hat{\Gamma}_2+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}_1=180°$

- Στο τρίγωνο ΒΕΓ:

Επειδή ΒΕ=ΒΓ είναι $\hat{\Gamma}_1=\hat{E}$ **(1)**

Η γωνία $\hat{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΓΕ οπότε:

$\hat{B}=\hat{\Gamma}_1+\hat{E}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\hat{B}=\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_1\Leftrightarrow\hat{B}=2\hat{\Gamma}_1\Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}_1=\hat{B}$

$\Leftrightarrow\hat{\Gamma}_1=\dfrac{\hat{B}}{2}$

- Στο τρίγωνο ΔΓΖ:

Επειδή ΔΖ=ΔΓ είναι $\hat{\Gamma}_2=\hat{Z}$ **(2)**

Η γωνία $\hat{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΓΕ οπότε:

$\hat{\Delta}=\hat{\Gamma}_2+\hat{Z}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\hat{B}=\hat{\Gamma}_2+\hat{\Gamma}_2\Leftrightarrow\hat{\Delta}=2\hat{\Gamma}_2\Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}_2=\hat{\Delta}$

$\Leftrightarrow\hat{\Gamma}_2=\dfrac{\hat{\Delta}}{2}$

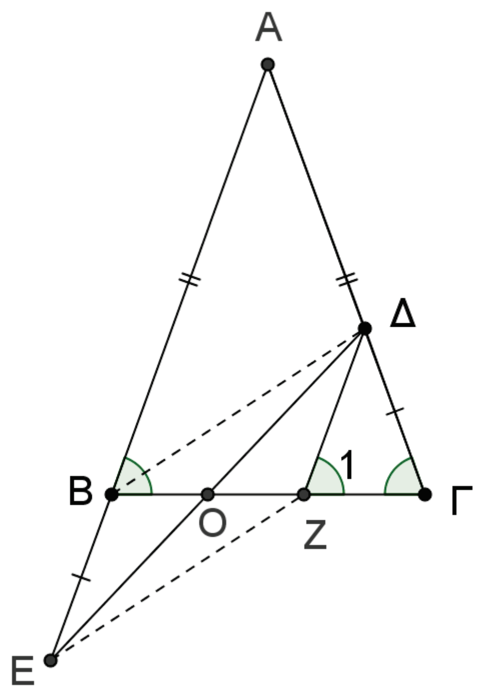
Ομως $\hat{\Delta}=\hat{B}$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου επομένως $\hat{\Gamma}_2=\dfrac{\hat{B}}{2}$

Αρα:

$\hat{\Gamma}_2+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}_1=\Leftrightarrow\dfrac{\hat{B}}{2}+\hat{\Gamma}+\dfrac{\hat{B}}{2}=\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$ *(οι $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές ωι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΔΕ που τέμνονται από την ΒΓ).*

Σ4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ της ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΒΓ διχοτομεί τη ΔΕ.

Λύση:



Σκέψη: Το ότι η ΒΓ διχοτομεί την ΔΕ σημαίνει ότι διέρχεται από το μέσο της. Φυσικά είναι το ίδιο αν δείξουμε ότι κάποιο τμήμα της ΒΓ διχοτομεί την ΔΕ. Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.Αρα θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε παραλληλόγραμμο με μια διαγώνιο ΔΕ και ως άλλη διαγώνιο τμήμα της ευθείας ΒΓ.

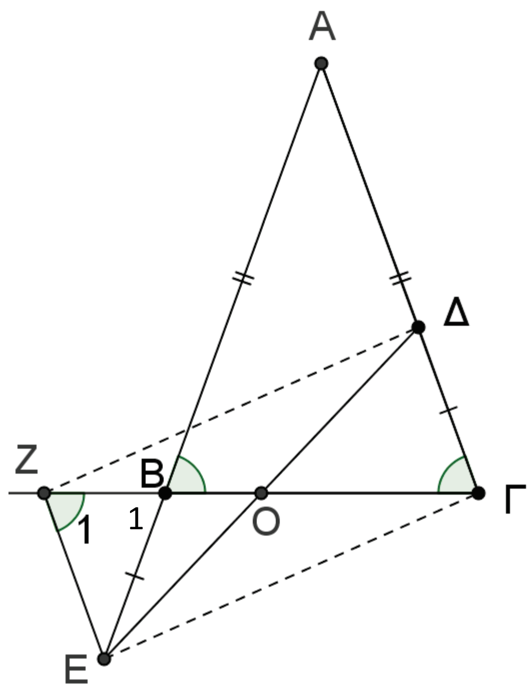
Φέρνουμε ΔΖ//ΑΒ.Τότε $\hat{Z}_1 = \hat{B}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Αφού ΑΒ=ΑΓ θα είναι και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε $\hat{Z}_1 = \hat{B}$.Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι ΔΖ=ΔΓ και επειδή ΒΕ=ΔΓ θα είναι και ΔΖ=ΒΕ. Είναι λοιπόν ΔΖ=//ΒΕ οπότε ΒΔΖΕ παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιοί του ΒΖ και ΔΕ διχοτομούνται.

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να φέρνουμε και παράλληλη από το Ε προς την ΑΓ.

$\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}$ ως εντός εναλλάξ και $\hat{B} = \hat{B}_1$ ως κατακορυφήν.

Επειδή και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ θα είναι $\hat{Z}_1 = \hat{B}$ κλπ



Αθανασίου Δημήτρης (Μαθηματικός) asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

Σ5. Ένα ποταμός, του οποίου οι όχθες είναι ευθύγραμμες, διέρχεται μεταξύ δύο χωριών Α και Β που απέχουν άνισες αποστάσεις από τις όχθες του. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί μια γέφυρα κάθετη προς τον ποταμό, ώστε τα δύο χωριά να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από τις αντίστοιχες εισόδους της γέφυρας;

Λύση:

«Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα είναι λυμένο και έστω ΓΔ η θέση της γέφυρας και ΑΓ=ΒΔ όπου Α και Β τα δύο χωριά.Εάν φέρουμε μια βοηθητική ευθεία ΒΕ, παράλληλη και ίση προς την ΓΔ, παρατηρούμε ότι το σημείο Γ προσδιορίζεται από την κάθετη ΓΜ στο μέσο Μ της ΑΕ (μεσοκάθετος).Πράγματι το ΓΔΒΕ είναι παραλληλόγραμμο (ΓΔ//=ΒΕ) και επομένως ΒΔ=ΕΓ=ΑΓ»

Σχόλιο:Αυτά γράφει το λυστάρι του βιβλίου.Θα έλεγα ότι δεν είναι και τόσο πειστικά.Νομίζω η ιδέα είναι να προσπαθήσω να φέρω τα ίσα απομακρυσμένα τμήματα ΒΔ και ΓΑ κοντά και κατά προτίμηση με κοινό άκρο το Γ.Το παραλληλόγραμμο είναι ένας τρόπος να μετακινώ ένα τμήμα.Οχι βέβαια το ίδιο αλλά να κατασκευάζω ένα ίσο με αυτό.

Η κατασκευή σε βήματα:

<u>1ο βήμα:</u>

Φέρνω από το Β κάθετη ευθεία προς τις όχθες του ποταμού και παίρνω πάνω σε αυτή σημείο Ε ώστε ΒΕ=ΖΗ (πλάτος ποταμού)

<u>2ο βήμα</u>

Ενώνω το Ε με το Α

<u>3ο βήμα</u>

Φέρνω την μεσοκάθετη του τμήματος ΕΑ που τέμνει την μια όχθη στο Γ.

<u>4ο βήμα</u>

Φέρνω το τμήμα ΓΔ κάθετο στις όχθες του ποταμού.

Το ΓΔ παριστάνει την θέση της γέφυρας με τα ζητούμενα χαρακτηριστικά.