

Ορισμός

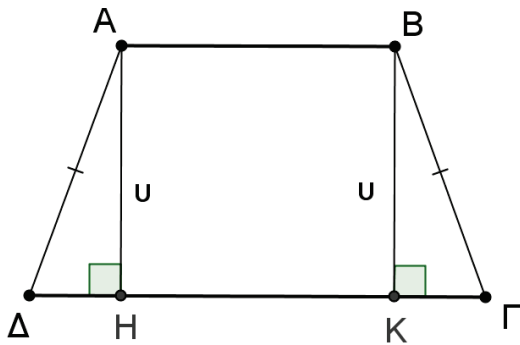
Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

• Ιδιότητες ισοσκελούς τραπέζιου

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

(i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.

(ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.



Απόδειξη:

(i) Έστω ABΓΔ ισοσκελές τραπέζιο ($AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD = BG$). Φέρουμε τα ύψη AH και BK.

Στο τετράπλευρο οι γωνίες $\hat{H} = 90^\circ$ και $\hat{K} = 90^\circ$. Επίσης $\hat{H}\hat{A}\hat{B} = 90^\circ$ αφού είναι εντός και επί τα αυτά της H και δεδομένου ότι $AB \parallel \Delta\Gamma$ είναι παραπληρωματική της.

Αρα από γνωστό κριτήριο το ABKH είναι ορθογώνιο οπότε $AH = BK$.

Πλέον τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΔΑ και ΚΒΓ έχουν:

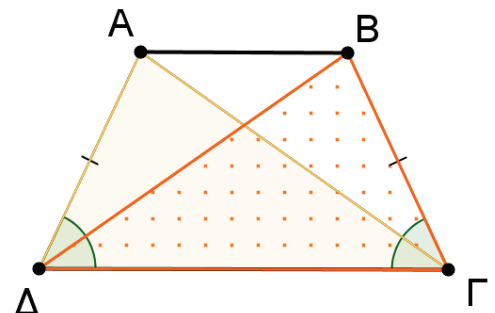
$$\left. \begin{array}{l} \hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \\ AD = BG \text{ δεδομένα} \\ AH = BK \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(ΘII §3.6) Είναι ίσα οπότε θα έχουν } \hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$$

Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{A} = \hat{B}$.

(ii) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\Gamma \text{ κοινή} \\ AD = BG \text{ αφού ισοσκελές τραπέζιο} \\ \hat{\Delta} = \hat{\Gamma} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα,}$$

οπότε $AG = BD$.



• **Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές**

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

(i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.

(ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

E2. Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση:

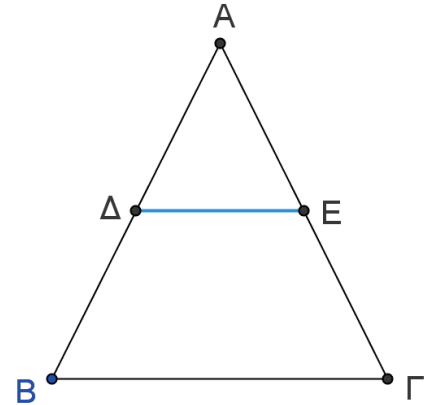
$$\left. \begin{array}{l} \Delta \text{ μέσο } AB \\ E \text{ μέσο } AG \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta E // B\Gamma$$

Επιπλέον ΒΔ και ΓΕ τέμνονται.

Αρα σύμφωνα με τον ορισμό το ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

$$\bullet AB = AG \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{AG}{2} \Rightarrow \Delta B = E\Gamma \text{ δηλαδή το } \Delta E\Gamma B \text{ είναι}$$

ισοσκελές τραπέζιο.



E3. Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπέζιου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) τέμνονται στο Ο. Αν Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Στο τρίγωνο } OAB \text{ έχουμε:} \\ E \text{ μέσο } OA \\ Z \text{ μέσο } OB \end{array} \right\} \Rightarrow EZ // AB \text{ (1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Στο τρίγωνο } OD\Gamma \text{ έχουμε:} \\ \Theta \text{ μέσο } OD \\ H \text{ μέσο } O\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \Theta H // \Delta\Gamma \text{ (2)}$$

• Μας δίνεται ότι ΑΒ//ΓΔ (3). Αρα από (1), (2), (3): ΕΖ//ΘΗ.

• Στο τρίγωνο ΟΑΔ έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} E \text{ μέσο } OA \\ \Theta \text{ μέσο } O\Delta \end{array} \right\} \Rightarrow E\Theta // \frac{A\Delta}{2} \text{ (4)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Στο τρίγωνο } OB\Gamma \text{ έχουμε:} \\ Z \text{ μέσο } OB \\ H \text{ μέσο } O\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow ZH // \frac{B\Gamma}{2} \text{ (5)}$$

• Επειδή οι ΑΔ και ΒΓ τέμνονται και οι παράλληλες προς αυτές ΕΘ και ΖΗ θα τέμνονται. Αφού λοιπόν μόνο οι δύο απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι παράλληλες είναι τραπέζιο (ορισμός τραπέζιου)

Αφού ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο θα είναι ΑΔ=ΒΓ (6) Αρα: $E\Theta = \frac{(4) A\Delta}{2} = \frac{(6) B\Gamma}{2} = ZH$ οπότε το ΕΖΗΘ είναι

ισοσκελές τραπέζιο.

