▪ *<u>Ορισμός</u>*: **Τραπέζιο** λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει <u>μόνο δύο</u> πλευρές παράλληλες.

▪ Το ευθύγραμμο τρμήμα που ενώνει τα μέσα των μή παράλληλων πλευρών του λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου.

Θεώρημα Ι *(§5.10)*

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι
i) παράλληλη προς τις βάσεις του και
ii) ίση με το ημιάθροισμά τους.

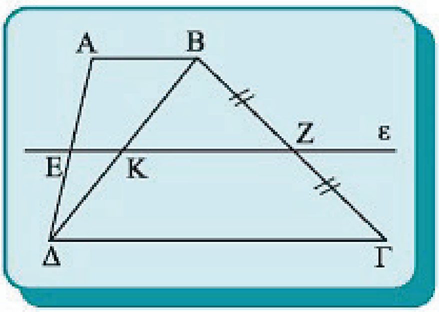
Δηλαδή, αν ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ, τότε:

i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ και ii) $\text{ΕΖ} = \dfrac{\text{ΑΒ} + \text{ΓΔ}}{2}$.

Απόδειξη:

<u>Παρατήρηση:</u> Η πιο κάτω απόδειξη ίσως μας ξενίσει λίγο.Θα περίμενε κανείς ότι θα σχεδιάζαμε την διάμεσο του τραπεζίου και θα δείχναμε με κάποιο τρόπο ότι έχει τις ιδιότητες i) και ii). Αντί αυτού, από το μέσο Ε της πλευράς ΑΔ φέρνει παράλληλη προς τις ΑΒ, ΓΔ που τέμνει την ΒΓ στο μέσο της Ζ άρα η ΕΖ *(που στην πορεία (καθ' οδόν) δείχνεται ότι έχει τις ιδιότητες i) και ii)) είναι η* διάμεσος του τραπεζίου.

● Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) *(σχήμα.35)*, τη διαγώνιο του ΒΔ και Ε το μέσο της ΑΔ. Από το Ε φέρουμε ευθεία ε παράλληλη των ΑΒ και ΓΔ που τέμνει τις ΒΔ και ΒΓ στα Κ και Ζ αντίστοιχα. Τότε:



Σχήμα 35

Στο τρίγωνο ΑΒΔ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΚ//ΑΒ, οπότε το Κ είναι το μέσο της ΒΔ *(§ 5.6 Θεώρημα ΙΙ)* και $\text{ΕΚ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}$ **(1)** *(§ 5.6 Θεώρημα Ι)* .

Επίσης στο τρίγωνο ΒΔΓ το Κ είναι μέσο της ΒΔ και ΚΖ//ΓΔ, οπότε το Ζ είναι το μέσο της ΒΓ*(§ 5.6 Θεώρημα ΙΙ)* και $\text{ΚΖ} = \dfrac{\text{ΓΔ}}{2}$ *(§ 5.6 Θεώρημα Ι)* **(2)**.

Επομένως η ΕΖ είναι διάμεσος του τραπεζίου και

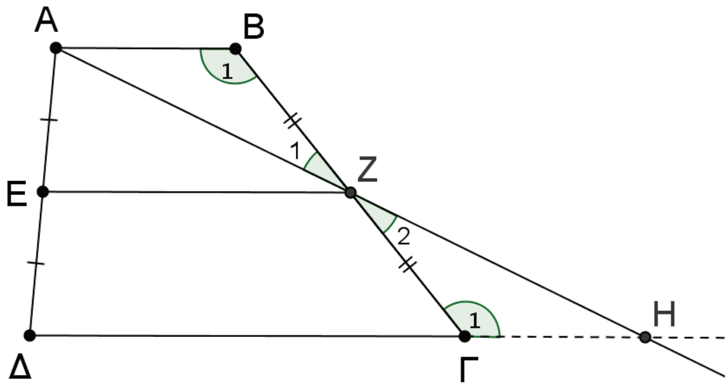
i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ (από κατασκευή).

ii) Από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι

$$\text{ΕΚ} + \text{ΚΖ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2} + \frac{\text{ΓΔ}}{2} \text{ ή } \text{ΕΖ} = \frac{\text{ΑΒ}+\text{ΓΔ}}{2}$$

2η απόδειξη *(σχολικό βιβλίο 1992 Αλιμπινίση, Δημάκου, Εξαρχάκου, Κοντογιάννη, Τασσόπουλου)*

Η ΑΖ τέμνει την ΑΒ επομένως θα τέμνιε και την παράλληλή της ΔΓ σε ένα σημείο έστω Η.



Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΗΓΖ είναι ίσα διότι:

i) ΒΖ=ΖΓ,

ii) $\hat{\text{Z}}_1 = \hat{\text{Z}}_2$ ως κατακορυφήν

iii) $\hat{\text{B}}_1 = \hat{\Gamma}_1$ ως εντός εναλλάξ *(των παραλλήλων ΑΒ και ΔΗ που τέμνονται από την ΒΓ).*

Επομένως από κριτήριο Γ-Π-Γ είναι ίσα, συνεπώς ΓΗ=ΑΒ και

ΑΖ=ΖΗ δηλαδή το Ζ είναι και μέσο του τμήματος ΑΗ.

Στο τρίγωνο ΑΔΗ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ε μέσο της ΑΔ} \\ \\ \text{Ζ μέσο της ΑΗ}\end{array}\right\} \Rightarrow \textit{(§ 5.6 Θεώρημα Ι)} \left\{\begin{array}{l}\text{i) } \text{ΕΖ}//\text{ΔΗ } \textit{οπότε } \text{ΕΖ}//\text{ΔΓ}//\text{ΑΓ } \textbf{και} \\ \\ \text{ii) } \text{ΕΖ} = \dfrac{\text{ΔΗ}}{2} = \dfrac{\text{ΔΓ}+\text{ΓΗ}}{2} = \dfrac{\text{ΔΓ}+\text{ΑΒ}}{2} = \dfrac{\text{ΑΒ}+\text{ΔΓ}}{2}\end{array}\right.$$