5.10 1ο Φυλλάδιο τραπέζιο *(version 30-3-2016)*

5.10 Τραπέζιο

Συμπληρώστε τα κενά με κάποια απο τις παρατιθέμενες λέξεις:

παράλληλες—μόνο—βάσεις—διάμεσος--τετράπλευρο--ύψος

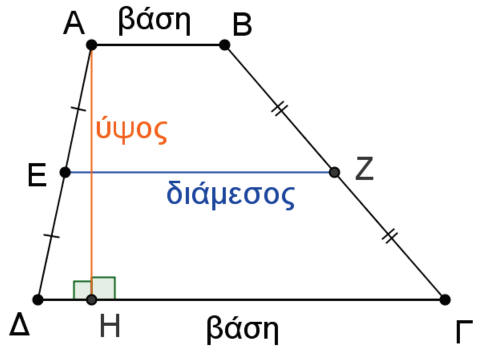
Ορισμός

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει **μόνο** δύο πλευρές **παράλληλες.**

Οι παράλληλες πλευρές ΑΒ και ΓΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου.

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου.



Θεώρημα Ι

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Δηλαδή, αν ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ, τότε:

i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ **και ii)** $ΕΖ = \dfrac{ΔΓ + ΑΒ}{2}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

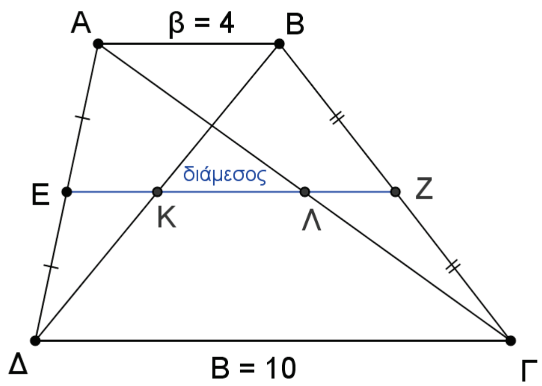
● Στο διπλανό τραπεζιο δίνονται τα μήκη των βάσεων.Συμπληρώστε τις παρακάτω σχέσεις σύμφωνα με το πιο πάνω Θεώρημα και ΠΟΡΙΣΜΑ.Να υπολογιστούν και τα μήκη των ΕΖ και ΚΛ.

ΚΒ = ΚΔ

ΑΛ = ΛΓ

$$ΚΛ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2} = \frac{10-4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$ΕΖ = \frac{ΔΓ + ΑΒ}{2} = \frac{10+4}{2} = \frac{14}{2} = 7$$



Αθανασίου Δημήτρης (Μαθηματικός) asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

Ε1. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και η διάμεσός του ΕΖ. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Κ και Η, Θ είναι τα μέσα των ΚΑ και ΚΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ, Η, Θ είναι κορυφές τραπεζίου.*

Λύση:

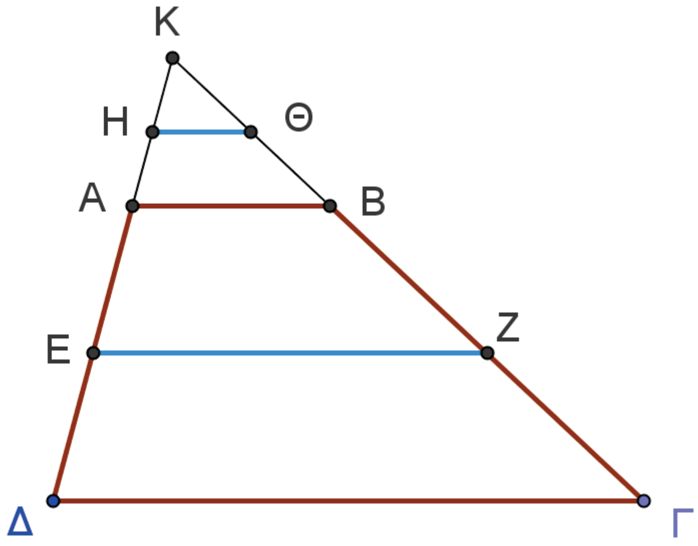
Στο τρίγωνο ΚΑΒ είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η μέσο ΚΑ}\\ \text{Θ μέσο ΚΒ}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΗΘ}//\text{ΑΒ} \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος τραπεζίου είναι παράλληλη στις βάσεις επομένως και ΕΖ// ΑΒ (2)

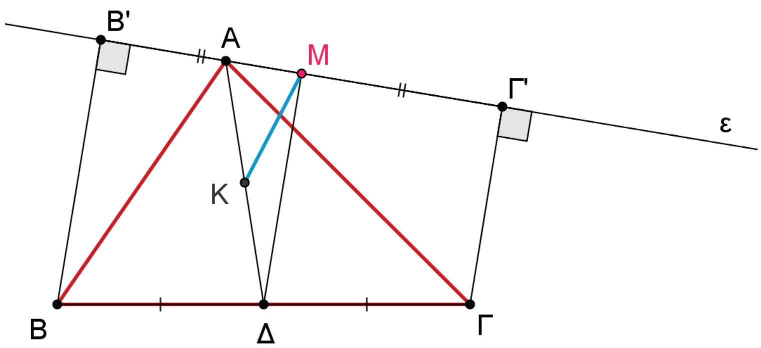
Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΗΘ//ΕΖ.

Επιπλέον ΗΕ και ΘΖ τέμνονται στο Κ οπότε σύμφωνα με τον ορισμό το ΗΘΖΕ είναι τραπέζιο.



Ε6. *Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία ε που δεν τέμνει το τρίγωνο και ας είναι ΒΒ′ και ΓΓ′ οι αποστάσεις των Β και Γ από την ευθεία ε. Αν Μ είναι το μέσο της Β′Γ′ και Κ το μέσο της διαμέσου ΑΔ να αποδείξετε ότι* $\text{ΜΚ} = \dfrac{\text{ΑΔ}}{2}$

Λύση:



$$\left.\begin{array}{l}\text{ΒΒ}' \perp \text{Β}'\text{Γ}'\\ \text{ΓΓ}' \perp \text{Β}'\text{Γ}'\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΒΒ}'//\text{ΓΓ}'$$ *(Πόρισμα ΙΙ§4.2).Αρα*

$\text{ΒΒ}'\text{Γ}'\text{Γ}$ τραπέζιο.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Μ μέσο Β}'\text{Γ}'\\ \text{Δ μέσο ΒΓ}\end{array}\right\} \Rightarrow$$ ΜΔ διάμεσος του τραπεζίου $\text{ΒΒ}'\text{Γ}'\text{Γ}$. οπότε $\text{ΜΔ}//\text{ΓΓ}'$ *(§ 5.10 Θεώρημα Ι)*

$$\left.\begin{array}{l}\text{ΜΔ}//\text{ΓΓ}'\\ \text{ΓΓ}' \perp \text{Β}'\text{Γ}'\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΜΔ} \perp \text{Β}'\text{Γ}'$$ *(ΠΟΡΙΣΜΑ στην Πρόταση ΙΙΙ ιδιότητες παραλλήλων ευθειών)*

Αρα $\Delta\hat{\text{Μ}}\text{Α} = 90°$ οπότε αφού ΜΚ διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, θα είναι

$\text{ΜΚ} = \dfrac{\text{ΑΔ}}{2}$ *(5.9 Θεώρημα Ι).*