5.4 Ρόμβος ΛΥΣΕΙΣ

Ορισμός

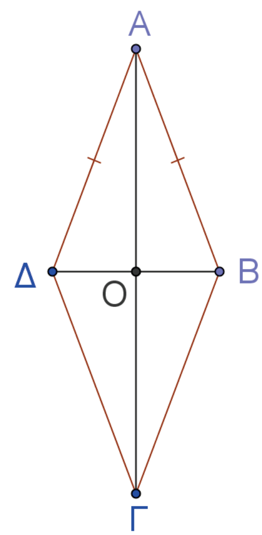
Ρόμβος λέγεται το **παραλληλόγραμμο** που έχει δύο **διαδοχικές** πλευρές ίσες.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.

• Ιδιότητες του ρόμβου

(i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται **κάθετα.**

(ii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου **διχοτομούν** τις γωνίες του.



Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, η διάμεσος του ΑΟ είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ *(Πόρισμα Ι σ.40)*. Επομένως $A\Gamma \perp B\Delta$ και η ΑΓ διχοτομεί την $\hat{A}$. Όμοια η ΑΓ διχοτομεί τη Γ και η ΒΔ τις Β και Δ.

• Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ένα **τετράπλευρο** είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

(ii) Είναι παραλληλόγραμμο και δυο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.

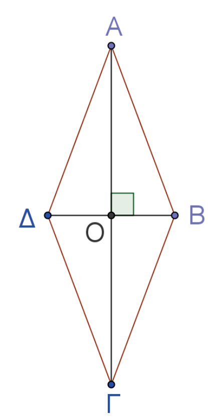
(iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.

(iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

Απόδειξη

(i) Αφού έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οι απέναντι πλευρές του θα είναι και αυτές ίσες οπότε από γνωστό κριτήριο θα είναι παραλληλόγραμμο.Αλλά και δύο διαδοχικές θα είναι ίσες οπότε από τον ορισμό είναι ρόμβος

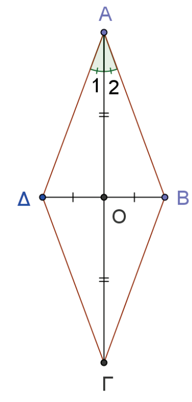
(ii) Προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.



(iii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με $A\Gamma \perp B\Delta$. Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΟ είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η ΑΟ είναι και ύψος, επειδή $A\Gamma \perp B\Delta$. Άρα *(Εφαρμογή 2η §3.10-3.11)* το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε ΑΒ = ΑΔ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

(iv) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΑΓ διχοτόμος της $\hat{A}$. Αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται ΔΟ=ΟΒ

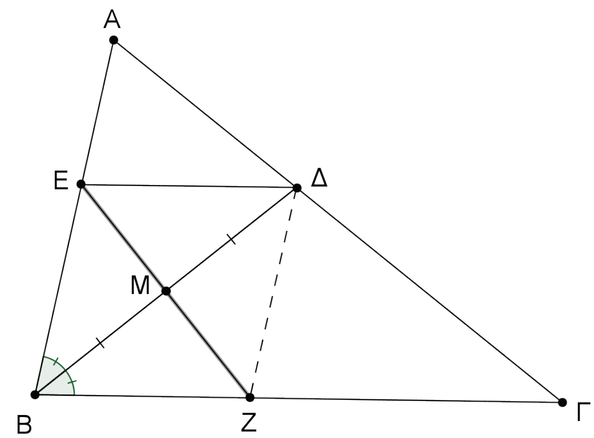
Επομένως το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές (αφού ΑΟ διχοτόμος και διάμεσος), *(Εφαρμογή 2η §3.10-3.11)* οπότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.



Α1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και Μ το μέσο της ΒΔ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.*

Λύση:

***Σκέψη**: Εκ κατασκευής είναι ΕΔ//ΒΖ.Αρα αρκεί να δείξω ότι ΕΔ=ΒΖ ώστε το ΒΕΔΖ να είναι παραλληλόγραμμο.*



Θα συγκρίνω τα τρίγωνα ΕΔΜ και ΖΒΜ.Αυτά έχουν

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{BM}=\mathrm{M}\Delta \text{ δεδομένα}\\ \hat{\mathrm{M}}_1=\hat{\mathrm{M}}_2 \text{ ως κατακορυφήν}\\ \hat{\Delta}_1=\hat{\mathrm{B}}_1 \text{ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΔ και ΒΖ}\\ \qquad\quad \text{που τέμνονται από την ΒΔ}\end{array}\right\}\Rightarrow \Gamma\,\Pi\,\Gamma$$

τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε θα έχουν και ΕΔ=ΒΖ, ΕΜ=ΜΖ και

$\hat{\mathrm{E}}_1=\hat{\mathrm{Z}}_1$.

Επομένως το τετράπλευρο ΕΔΖΒ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες οπότε από γνωστό κριτήριο θα είναι παραλληλόγραμμο.(Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το ΕΜ=ΜΖ και να πούμε ότι είναι παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοί του διχοτομούνται)

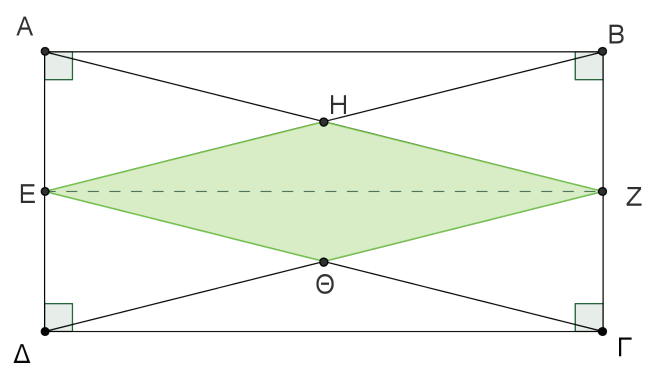
Επειδή επιπλέον η διαγώνιός του ΒΔ διχοτομεί μια γωνία του είναι ρόμβος από γνωστό κριτήριο.

Σημείωση: Εγώ έδειξα ότι ΕΒ=ΕΔ.Πιο σύντομο του σχολικού.

Α3. *Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΕ και Θ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ, να αποδείξετε ότι το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.*

Λύση:

- Επειδή ΑΔ=// ΒΓ θα είναι και $\frac{\mathrm{A}\Delta}{2}=//\frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$ δηλαδή ΑΕ=//ΖΓ



οπότε από γνωστό κριτήριο ΑΕΖΓ παραλληλόγραμμο, συνεπώς ΑΖ//ΕΓ.

- Παρόμοια ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΕΒ//ΔΖ

Αρα σύμφωνα με τον ορισμο του παρ αλληλογράμμου το ΕΗΖΘ είναι παραλληλόγραμμο.

- Επειδή ΑΔ=// ΒΓ θα είναι και ΑΔ/2=// ΒΓ/2 δηλαδή ΑΕ=//ΓΖ

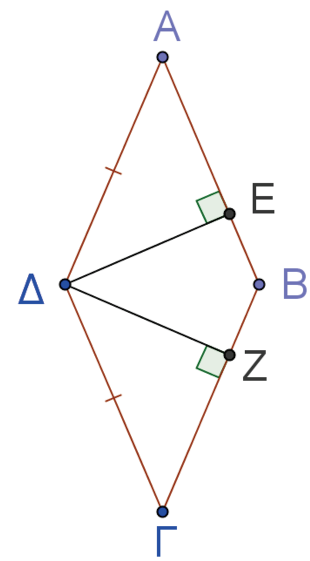
οπότε από γνωστό κριτήριο ΑΒΖΕ παραλληλογραμμο και επειδή έχει μια γωνία ορθή είναι ορθογώνιο.Επομένως οι διαγώνιοί του θα είναι ίσες το ίδιο και τα μισά τους.Συγκεκριμένα ΑΖ=ΕΒ και ΗΖ=ΕΗ.

- Επομένως το παραλλληλόγραμμο ΕΗΖΘ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες οπότε σύμφωνα με τον ορισμό είναι ρόμβος.

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr

Ε4. Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, **αν και μόνο αν** οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Λύση:

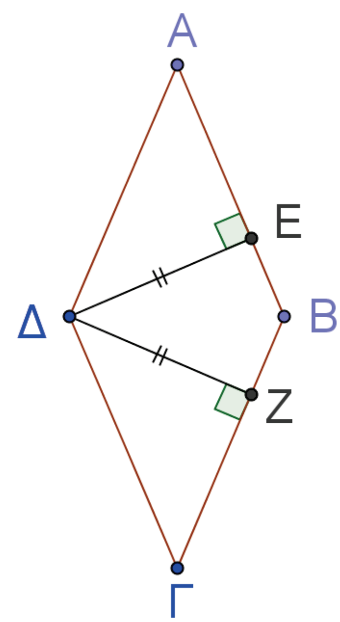


● Εστω ΑΒΓΔ ρόμβος.Φέρνουμε από μια κορυφή έστω την Δ τα κάθετα τμήματα ΔΕ και ΔΖ προς τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα.Τότε:

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΔ και ΖΔΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta A=\Delta\Gamma \text{ ο ρόμβος έχει όλες τις πλευρές του ίσες} \\ \hat{A}=\hat{\Gamma} \text{ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου} \\ \hat{E}=\hat{Z}=90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{3.6 Θεώρημα Ι είναι ίσα οπότε}$$

θα έχουν και ΔΕ=ΔΖ



● Εστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο. Φέρνουμε από μια κορυφή έστω την Δ τα κάθετα τμήματα ΔΕ και ΔΖ προς τις πλευρές ΑΒ και και ΒΓ αντίστοιχα και έστω ΔΕ=ΔΖ.Τότε στα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΔ και ΖΔΓ αφού $\hat{A}=\hat{\Gamma}$ θα είναι και $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2$ ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών:

Ετσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΔ και ΖΔΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E=\Delta Z \text{ δεδομένα} \\ \hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2 \\ \hat{E}=\hat{Z}=90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΓΠΓ είναι ίσα οπότε θα έχουν και ΔΑ=ΔΓ, οπότε το}$$

παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες οπότε είναι ρόμβος (ορισμός ρόμβου).

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr