5.5 ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ *(version 27-2-2016)*

● Συμπληρώστε σωστά με κάποια από τις λέξεις: **ορθογώνιο—ρόμβος-- παραλληλόγραμμο**

Ορισμός

Τετράγωνο λέγεται το .... που είναι .... και ....

Ιδιότητες τετραγώνου

i) Οι **απέναντι** πλευρές του είναι **παράλληλες**.

(ii) **Όλες** οι γωνίες του είναι **ορθές**.

(iii) **Όλες** οι πλευρές του είναι **ίσες**.

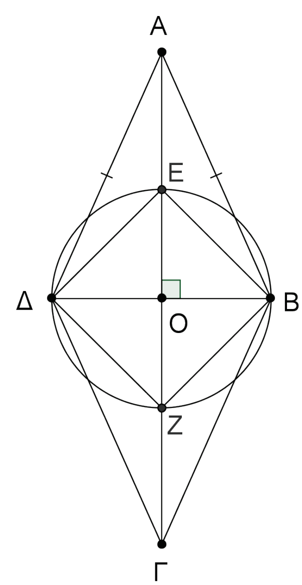
(iv) Οι διαγώνιοί του **διχοτομούνται,** είναι **ίσες**, τέμνονται **κάθετα**, και **διχοτομούν** τις γωνίες του.

Κριτήρια ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο

Ενα **παραλληλόγραμμο** είναι τετράγωνο αν ισχύει καθένας από τους δυνατούς συνδιασμούς των παρακάτω προτάσεων:

Ορθογώνιο	**Ρόμβος**
Μια γωνία ορθή	Δύο διαδοχικές πλευρές ίσες
Διαγώνιοι ίσες	Διαγώνιες κάθετες
	Μια διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία του.

Ε5. *Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Παίρνουμε δύο σημεία Ε και Ζ της ΑΓ, ώστε ΟΕ = ΟΖ = ΟΒ = ΟΔ. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι τετράγωνο.*



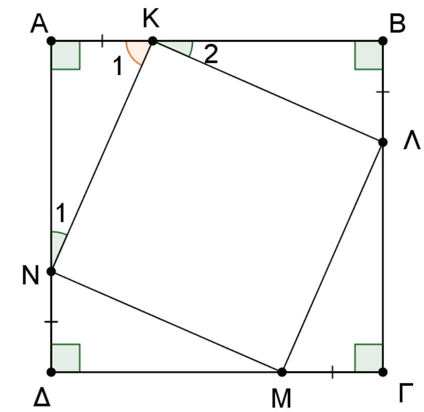
Λύση

Αφού ΟΕ = ΟΖ = ΟΒ = ΟΔ οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΕΒΖΔ διχοτομούνται, άρα αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

Επίσης ΕΖ=ΟΕ+ΟΖ=ΟΒ+ΟΔ=ΒΔ δηλαδή έχει και διαγώνιες ίσες οπότε είναι ορθογώνιο και επειδή επιπλέον $ΕΖ \perp ΔΒ$ έχουμε ότι είναι και ρόμβος οπότε τελικά τετράγωνο.

Ε6. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε σημεία Κ, Λ, Μ και Ν αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ. Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

Λύση:



Αφού ΑΒΓΔ τετράγωνο είναι ΑΒ=ΒΔ=ΔΓ=ΑΓ.Αν από αυτή αφαιρέσουμε κατά μέλη την ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ παίρνουμε ΚΒ=ΛΓ=ΜΔ=ΝΑ.

Τα τρίγωνα ΑΚΝ, ΒΚΛ, ΜΓΛ και ΜΔΝ έχουν

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{AK}=\mathrm{B}\Lambda=\Gamma\mathrm{M}=\Delta\mathrm{N} \\ \hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\hat{\Delta} \\ \mathrm{NA}=\mathrm{KB}=\Lambda\Gamma=\mathrm{M}\Delta= \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα οπότε}$$

ΚΝ=ΚΛ=ΛΜ=ΝΜ.Αρα το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.Επίσης από την ισότητα των τριγώνων $\hat{K}_2=\hat{N}_1$ οπότε: $\hat{K}_1+\hat{K}_2=\hat{K}_1+\hat{N}_1=90°$ (οξείες γωνίες στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΝ).

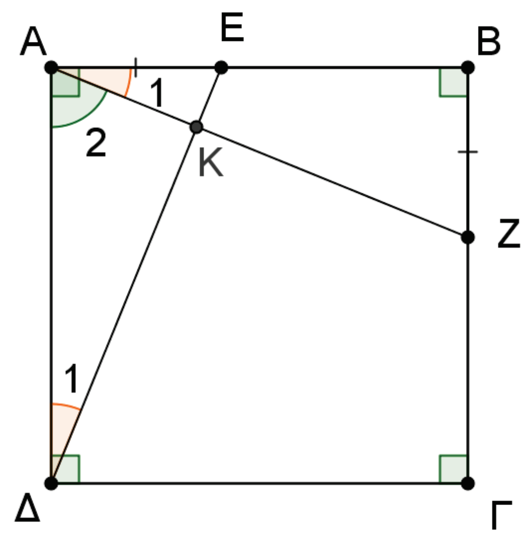
Αρα $\hat{K}=180°-\left(\hat{K}_1+\hat{N}_1\right)=180°-90°=90°$.

Α2. *Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ, τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΒΖ. Να αποδείξετε ότι*

i) *ΑΖ = ΔΕ,* ***ii)*** *ΑΖ ⊥ ΔΕ.*

Λύση:

Τα τρίγωνα ΒΑΖ και ΑΔΕ έχουν:



$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{BZ}=\mathrm{AE} \\ \hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{A}}=90° \\ \mathrm{AB}=\mathrm{A}\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ είναι ίσα οπότε θα έχουν και}$$

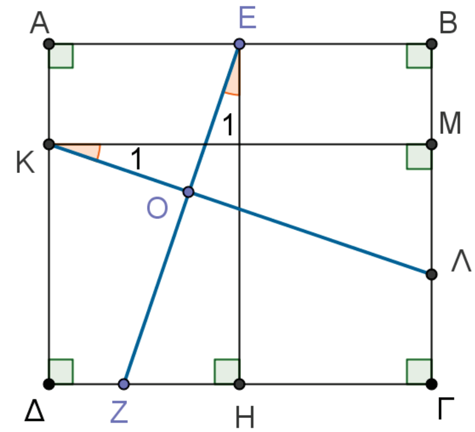
ΑΖ=ΔΕ καθώς και $\hat{\Delta}_1=\hat{A}_1$, οπότε:

$$\hat{\Delta}_1+\hat{A}_2=\hat{A}_1+\hat{A}_2=\hat{A}=90°$$

Επομένως αφού στο τρίγωνο ΚΑΔ δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90°, και η τρίτη θα είναι 90° δηλαδή $\hat{K}=90°$ οπότε $AZ \perp \Delta E$

Α4. *Να αποδείξετε ότι αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.*

Λύση:



Εστω $\mathrm{K\Lambda} \perp \mathrm{EZ}$.Φέρουμε $\mathrm{EH} \perp \Delta\Gamma$ και $\mathrm{KM} \perp \mathrm{B}\Gamma$.

Τότε $\mathrm{KM} =\perp \mathrm{EH}$

Τα ορθογώνια τρίγωνα HZE και ΜΛΚ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{KM} = \mathrm{EH} \\ \hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{M}} = 90° \\ \hat{\mathrm{K}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1 \text{ ως οξείες με πλευρές κάθετες} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Γ Π Γ είναι ίσα οπότε θα}$$

έχουν και ΕΖ=ΚΛ.