Ορθογώνιο *(version 24-2-2016)*

Ορισμός:

<u>Ορθογώνιο</u> λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει **μια** γωνία ορθή.

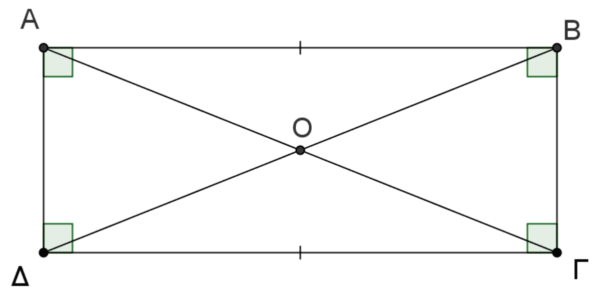
►Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, ενώ δύο διαδοχικές γωνίες παραπληρωματικές *(ως εντός και επι τα αυτά μέρη)* προκύπτει ότι όλες οι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ορθές.

Ιδιότητα ορθογωνίου.

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

Απόδειξη:

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ.Αυτά έχουν:



$$\left.\begin{array}{l} A\Delta \text{ κοινή} \\ \hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ \\ AB = \Gamma\Delta \text{ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου} \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi\Gamma\Pi$$

είναι ίσα, οπότε ΑΓ=ΒΔ.

<u>Σημαντική σημείωση</u>

Αφού οι διαγώνιοι του ορθογωνίου διχοτομούνται και είναι ίσες θα είναι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ δηλαδή οι διαγώνιες σχηματίζουν 4 ισοσκελή τριγωνάκια στο καθένα οι προσκείμενες στις βάσεις γωνίες είναι ίσες.

<u>Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο</u>

i) Είναι **παραλληλόγραμμο** και έχει **μία ορθή** γωνία.

Απόδειξη :

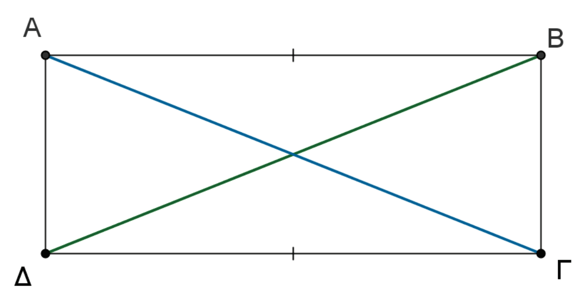
Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του παραλληλογράμμου.

(ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες.**

Απόδειξη :

(ii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με $A\Gamma = B\Delta$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ.Αυτά έχουν:

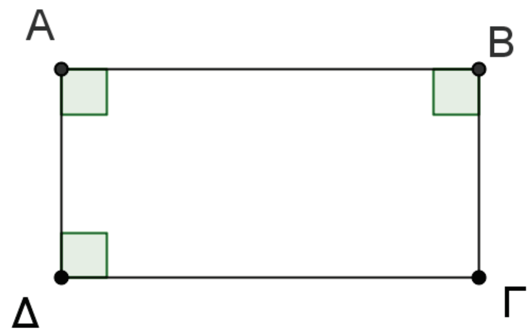


$$\left.\begin{array}{l} A\Delta \text{ κοινή} \\ A\Gamma = B\Delta \text{ δεδομένα} \\ AB = \Delta\Gamma \textit{ απέναντι πλευρές} \\ \textit{παραλληλογράμμου} \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi\Pi\Pi \text{ είναι ίσα, οπότε } \hat{A} = \hat{\Delta}\ .$$

Αλλά $\hat{A}+\hat{\Delta}=2\llcorner$ *(εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΑΔ),* οπότε $\hat{A}=\hat{\Delta}=1\llcorner$.
Επομένως, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο *(σύμφωνα με τον ορισμό αφού είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια γωνία ορθή)*

(iii) Έχει **τρεις** γωνίες **ορθές.**

Απόδειξη :



(iii) $\left.\begin{array}{l} A\Delta \perp AB \\ B\Gamma \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow A\Delta // B\Gamma$

$\left.\begin{array}{l} AB \perp A\Delta \\ \Delta\Gamma \perp A\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow AB // \Gamma\Delta$

Άρα το ΑΒΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο και επειδή για παράδειγμα $\hat{A}=1\llcorner$ είναι ορθογώνιο σύμφωνα με τον ορισμό.

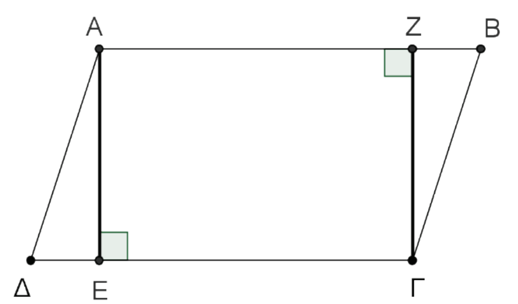
(iv) Όλες οι γωνίες του είναι **ίσες.**

Απόδειξη :

Αν όλες οι γωνίες είναι ίσες, έστω φ, τότε έχουμε: 4φ=360⇔ φ=90 οπότε επειδή το τετράπλευρο έχει 3 γωνίες ορθές από το κριτήριο **(iii)** είναι ορθογώνιο.

Ε1. *Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε ΑΕ ⊥ ΔΓ και ΓΖ ⊥ ΑΒ.Να αποδείξετε ότι το ΑΖΓΕ είναι ορθογώνιο.*

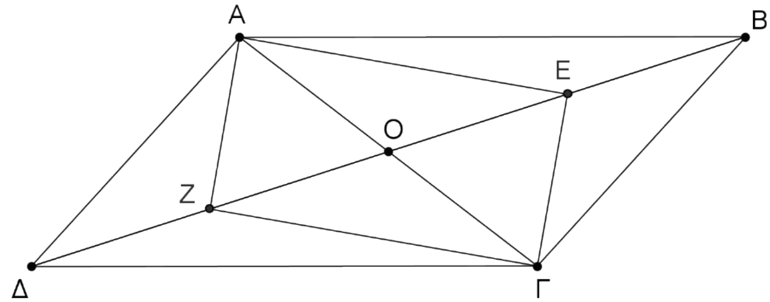
Λύση:



$E\hat{\Gamma}Z + A\hat{Z}\Gamma = 180^\circ$ *ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ οπότε* $E\hat{\Gamma}Z = 90^\circ$*.Επειδή το ΑΖΓΕ έχει 3 γωνίες ορθές είναι ορθογώνιο.*

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

Ε2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ΒΔ = 2ΑΓ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΟΒ και ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.*



Λύση:

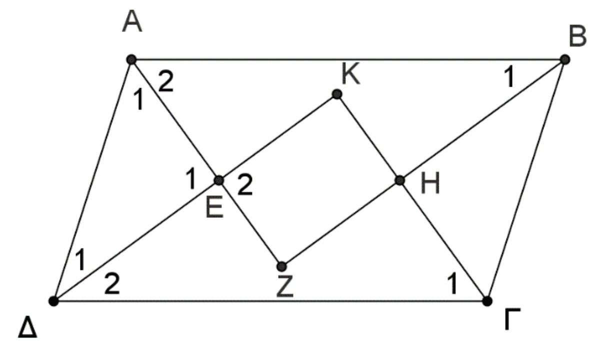
● *Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του είναι ίσες οπότε ΔΟ=ΟΒ και ΑΟ=ΟΓ.*

● *Είναι* $\mathrm{ZO} = \frac{\Delta\mathrm{O}}{2} = \frac{\mathrm{OB}}{2} = \mathrm{OE}$ *και ΑΟ=ΟΓ οπότε ΑΕΓΖ παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.*

● $\mathrm{ZE} = \mathrm{ZO} + \mathrm{OE} = \frac{\mathrm{O}\Delta}{2} + \frac{\mathrm{OB}}{2} = \frac{\mathrm{O}\Delta + \mathrm{OB}}{2} = \frac{\Delta\mathrm{B}}{2} = \frac{2\mathrm{A}\Gamma}{2} = \mathrm{A}\Gamma$ *άρα επειδή το παραλληλόγραμμο ΑΕΓΖ έχει ίσες διαγώνιες θα είναι από κριτήριο ορθογώνιο.*

Ε3. *Να αποδείξετε ότι αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δε συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.*

Λύση:



● Οι $\hat{A}$ και η $\hat{\Delta}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΑΔ.

δηλαδή $\hat{A}+\hat{\Delta}=180°$.

Αφού ΑΕ και ΔΕ διχοτόμοι των $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ έχουμε:

$\hat{A}_1+\hat{\Delta}_1=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}=\frac{\hat{A}+\hat{\Delta}}{2}=\frac{180°}{2}=90°$ οπότε στο τρίγωνο

ΕΑΔ: $\hat{E}_1=180°-\left(\hat{A}_1+\hat{\Delta}_1\right)=180°-90°=90°$

Ομως και $\hat{E}_2=\hat{E}_1$ ως κατακορυφήν γωνίες οπότε $\hat{E}_2=90°$

● Οι $\hat{\Delta}$ και η $\hat{\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ δηλαδή $\hat{\Delta}+\hat{\Gamma}=180°$.

Αφού ΔΚ και ΓΚ διχοτόμοι των $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουμε:

$\hat{\Delta}_2+\hat{\Gamma}_1=\frac{\hat{\Delta}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=\frac{\hat{\Delta}+\hat{\Gamma}}{2}=\frac{180°}{2}=90°$

οπότε στο τρίγωνο ΚΔΓ: $\hat{K}=180°-\left(\hat{\Delta}_2+\hat{\Gamma}_1\right)=180°-90°=90°$

● Οι $\hat{A}$ και η $\hat{B}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ δηλαδή $\hat{A}+\hat{B}=180°$.

Αφού ΑΖ και ΒΖ διχοτόμοι των $\hat{A}$ και $\hat{B}$ έχουμε:

$\hat{A}_2+\hat{B}_1=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}=\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{180°}{2}=90°$

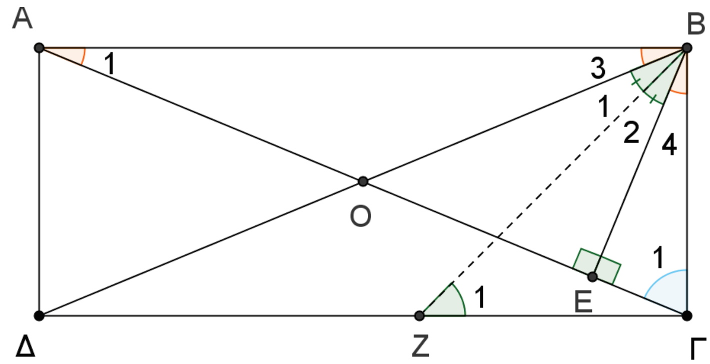
οπότε στο τρίγωνο ΖΑΒ: $\hat{Z}=180°-\left(\hat{A}_2+\hat{B}_1\right)=180°-90°=90°$

Δηλαδή το τετράπλευρο ΕΚΖΗ έχει τρείς γωνίες ορθές οπότε είναι ορθογώνιο.

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε έτοιμο το αποτέλεσμα ότι οι διχοτόμοι των εντός και επι τα αυτά μέρη γωνιών τέμνονται κάθετα (εφαρμογή 4.4) αλλά προτίμησα να ξανακάνω την απόδειξη ώστε να είναι αυτόνομη η λύση.

Σ2. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε ΒΕ ⊥ ΑΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας ΔΒΕ τέμνει τη ΓΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΓΖ.

Λύση:



Σκέψη: Αφού τα τμήματα που θέλω να δείξω ότι είναι ίσα έχουν κοινό άκρο αρκεί να δείξω ότι σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο δηλαδή αρκεί να δείξω ότι $\hat{Z}_1 = Z\hat{B}\Gamma$.

$\hat{Z}_1 = A\hat{B}Z$ **(1)** ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΒΖ.

Αφού ΒΖ διχοτόμος της $\Delta\hat{B}E$ είναι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ **(2)**

Επιπλέον αφού $A\Gamma = B\Delta \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow AO = OB$ οπότε $\hat{B}_3 = \hat{A}_1$ **(3)**

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΓ έχουμε: $\hat{A}_1 = 90° - \hat{\Gamma}_1$ **(4)**

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ έχουμε: $\hat{B}_4 = 90° - \hat{\Gamma}_1$ **(5)**

Από (4) και (5) παίρνουμε $\hat{A}_1 = \hat{B}_4$ **(6)**

Ομως $A\hat{B}Z = \hat{B}_1 + \hat{B}_3 \overset{(2)+(3)}{=} \hat{B}_2 + \hat{A}_1 \overset{(6)}{=} \hat{B}_2 + \hat{B}_4 = Z\hat{B}\Gamma$ **(7)**

Από **(1)** και **(7)** προκύπτει $\hat{Z}_1 = Z\hat{B}\Gamma$.

β τρόπος (μικροδιαφορές)

Σχολικό βιβλίο λύσεις

Αφού ΑΒΓΔ ορθογώνιο είναι ΟΑ=ΟΒ οπότε $\hat{A}_1 = \hat{B}_3$ **(1)**

Επίσης $\hat{B}_3 = \hat{\Delta}_1$ **(2)** ως εντός εναλλάξ.

Αρα από **(1)** και **(2)** $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$ **(3)**

Είναι $\hat{A}_1 = \hat{B}_4$ **(4)** ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες

Από **(3)** και **(4)** προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_4$ **(5).**

$\hat{Z}_1$ εξωτερική στο τρίγωνο ΒΔΖ οπότε $\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1 + \hat{B}_1 \overset{(5)}{=} \hat{B}_4 + \hat{B}_1 = \hat{B}_4 + \hat{B}_2$