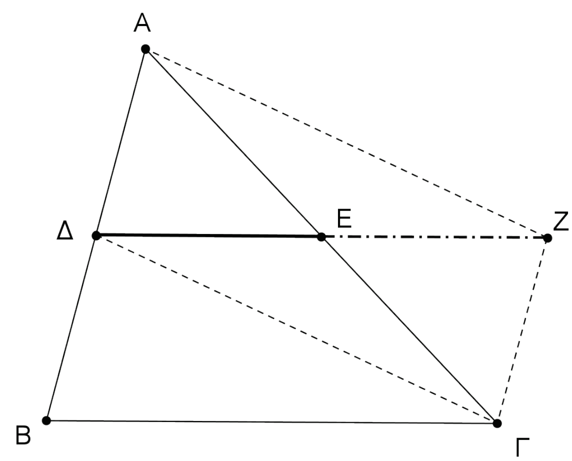
5.6 1ο φυλλάδιο ΛΥΣΕΙΣ

Θεώρημα Ι

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Απόδειξη:

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.Θα αποδείξουμε ότι ΔΕ // = $\frac{ΒΓ}{2}$.



Προεκτείνουμε τη ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ. Το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα ΑΔ = // ΓΖ, οπότε ΔΒ = // ΓΖ, αφού ΑΔ = ΔΒ. Έτσι το τετράπλευρο ΔΖΓΒ είναι παραλληλόγραμμο (*κριτήριο ii δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες)*, οπότε:

(i) ΔΖ // ΒΓ άρα ΔΕ // ΒΓ και

(ii) ΔΖ // ΒΓ ή 2ΔΕ = ΒΓ ή ΔΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η *(σ.106)*

Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Απόδειξη

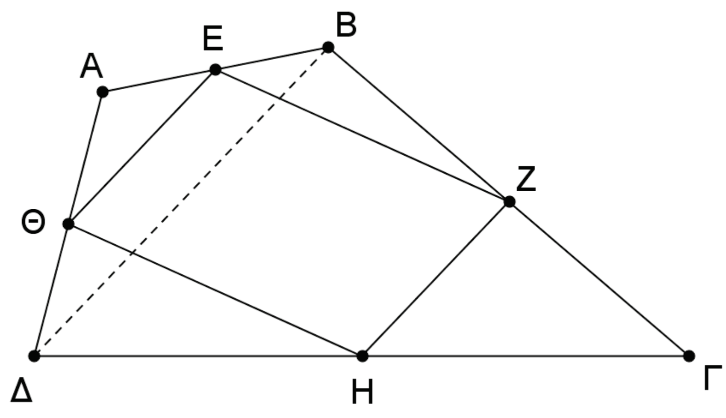
Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα.

Θα αποδείξουμε ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ.

Παρατηρούμε ότι τα Ε και Θ είναι τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε

ΕΘ =// $\frac{ΒΔ}{2}$ (1)

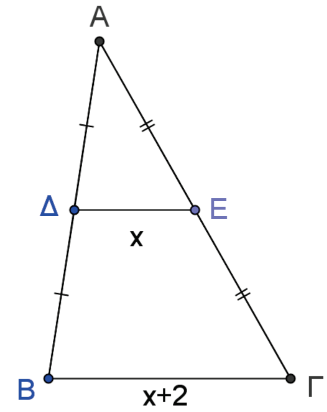


Όμοια από το τρίγωνο ΒΓΔ προκύπτει ότι ΖΗ =// $\frac{ΒΔ}{2}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι ΕΘ = // ΖΗ, οπότε το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

Κ1. Να υπολογίσετε το x.

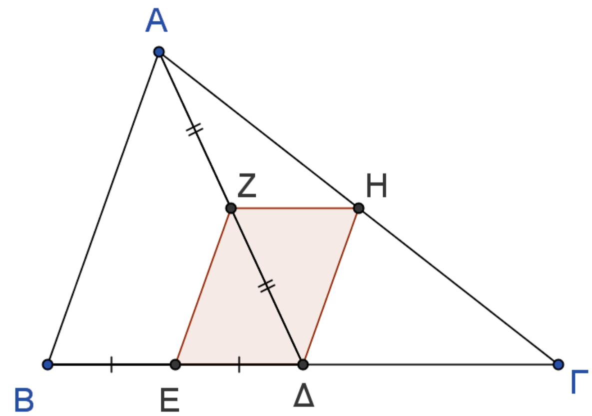


Λύση:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta \text{ μέσο του } AB\\ E \text{ μέσο του } A\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E = // \frac{B\Gamma}{2}$$ *(§ 5.6 Θεώρημα Ι)*

$$\Delta E = // \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow x = \frac{x+2}{2} \Leftrightarrow 2x = x+2 \Leftrightarrow 2x - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$$

Ε2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Αν Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση:

Στο τρίγωνο ΑΔΓ είναι:

$$\left.\begin{array}{l}Z \text{ μέσο του } A\Delta\\ H \text{ μέσο του } A\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow ZH = // \frac{\Delta\Gamma}{2}$$ *(§ 5.6 Θεώρημα Ι)*

Ομως $\Delta\Gamma = B\Delta \Leftrightarrow \dfrac{\Delta\Gamma}{2} = \dfrac{B\Delta}{2} = E\Delta$

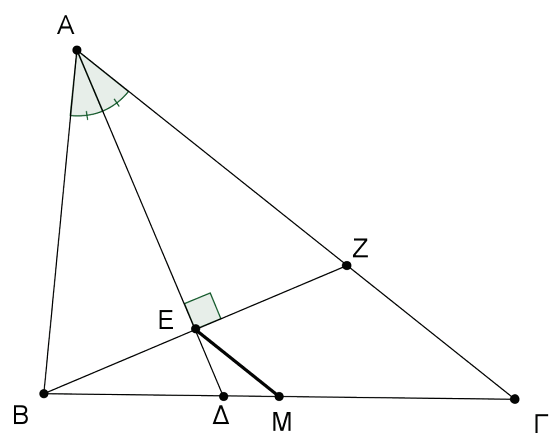
Αρα $ZH = // E\Delta$ οπότε το ΖΗΔΕ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, οπότε (κριτήριο ii) είναι παραλληλόγραμμο.

Σ5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ, η διχοτόμος του ΑΔ, και Μ το μέσο της ΒΓ.Αν Ε είναι η προβολή του Β στη διχοτόμο ΑΔ, να αποδείξετε ότι :

i) ΕΜ // ΑΓ

ii) $EM = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$

iii) $\Delta\hat{E}M = \dfrac{\hat{A}}{2}$



Λύση:

i) Στο τρίγωνο ΑΒΖ η διχοτόμος ΑΕ είναι και ύψος άρα είναι το ΑΒΖ είναι ισοσκελές με ΑΖ=ΑΒ, οπότε ΑΕ θα είναι και διάμεσος δηλαδή Ε μέσο του ΒΖ.

$$\left.\begin{array}{l}E \text{ μέσο του } BZ\\ M \text{ μέσο του } B\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow EM//Z\Gamma$$ *(§ 5.6 Θεώρημα Ι)* οπότε και $EM//A\Gamma$

ii) Επίσης $EM = \dfrac{Z\Gamma}{2} = \dfrac{A\Gamma - AZ}{2} = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$

iii) $\Delta\hat{E}M = \hat{A}_2 = \dfrac{\hat{A}}{2}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλλήλων ΑΓ και ΕΜ που τέμνονται από την ΑΕ.

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr