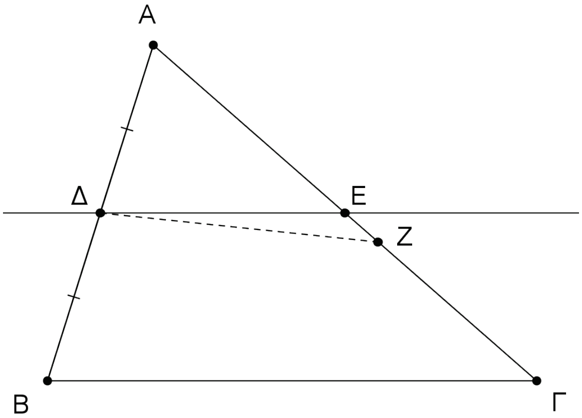
§5.6 2ο φυλλάδιο

Θεώρημα ΙΙ

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.



<u>Απόδειξη</u>

Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ας φέρουμε από το μέσο Δ της ΑΒ την παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε .

Θα αποδείξουμε *(με απαγωγή σε άτοπο)* ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ.

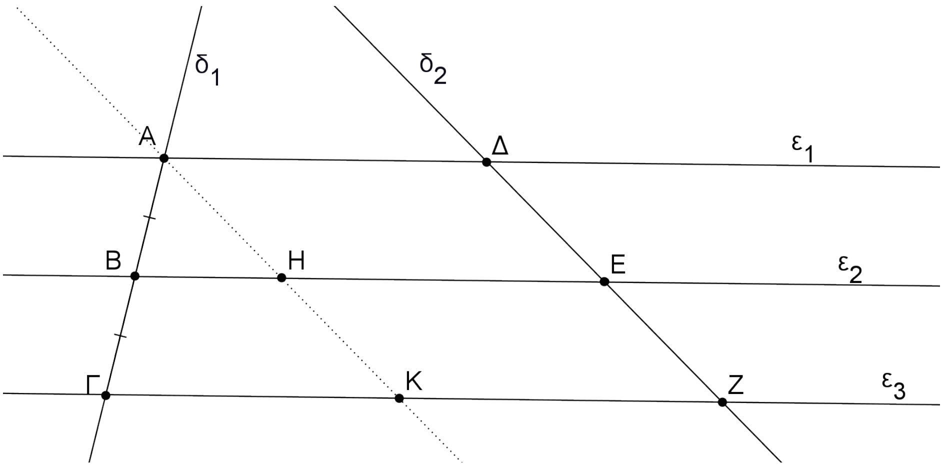
Έστω ότι το Ε δεν είναι μέσο της ΑΓ.

Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΓ, το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα ΔΖ // ΒΓ. Έτσι, όμως, έχουμε από το Δ δύο παράλληλες προς τη ΒΓ, που είναι άτοπο *(Αίτημα παραλληλίας σ.76)*. Άρα το Ε είναι μέσο της ΑΓ.

Θεώρημα ΙΙΙ

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει .

<u>Απόδειξη</u>



Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 οι οποίες τέμνουν την δ_1 στα σημεία Α, Β, Γ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ . Αν μια άλλη ευθεία δ_2 τέμνει τις ε_1, ε_2, ε_3 στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι ΔΕ = ΕΖ.

Φέρουμε ΑΚ // ΔΖ. Τότε τα τετράπλευρα ΑΔΕΗ και ΕΖΚΗ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε ΑΗ = ΔΕ **(1)** και ΗΚ = ΕΖ **(2)**. Στο τρίγωνο ΑΚΓ το Β είναι το μέσο της ΑΓ και ΒΗ // ΓΚ. Άρα το Η είναι μέσο της ΑΚ, δηλαδή ΑΗ = ΗΚ **(3)**. Από τις **(1)**, **(2)** και **(3)** προκύπτει ότι ΔΕ = ΕΖ.

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

Ε1. Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ και Ζ τυχαίο σημείο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΔΕ διχοτομεί την ΑΖ.

Λύση:

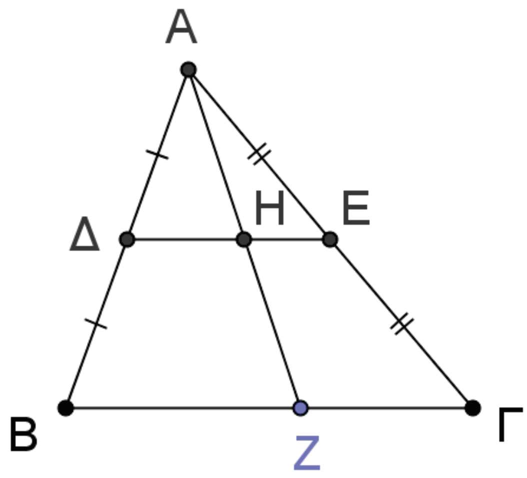
- Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta \text{ μέσο του } AB\\ E \text{ μέσο του } A\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E // B\Gamma \quad \textit{(§ 5.6 Θεώρημα I)}$$

- Στο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta \text{ μέσο του } AB\\ \Delta E // B\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow H \text{ μέσο της } AZ \quad \textit{(§ 5.6 Θεώρημα II)}$$

Δηλαδή η ΔΕ διχοτομεί την ΑΖ (διέρχεται από το μέσο της).



Α2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε και Ζ των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα.Αν η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Η να αποδείξετε ότι $\Gamma H = \frac{A\Gamma}{4}$.

Λύση:

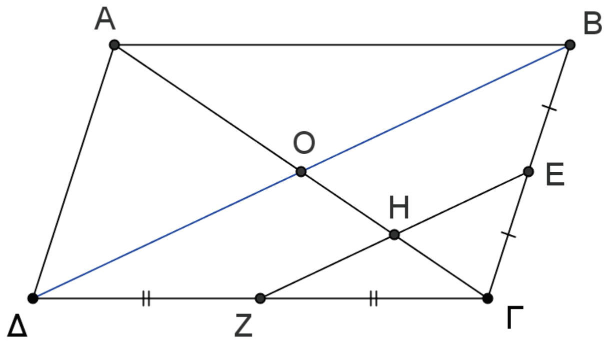
- Φέρνουμε την διαγώνιο ΒΔ που τέμνει την ΒΔ στο Ο.

Τότε στο τρίγωνο ΓΒΔ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}E \text{ μέσο του } B\Gamma\\ Z \text{ μέσο του } \Delta\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow ZE // \Delta B \quad \textit{(§ 5.6 Θεώρημα I)}$$

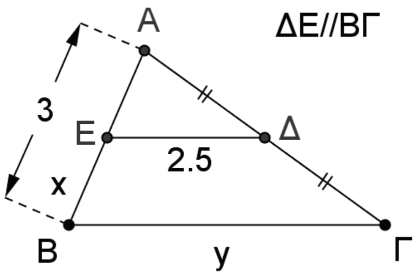
- Στο τρίγωνο ΒΓΟ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}E \text{ μέσο του } B\Gamma\\ EZ // B\Delta\end{array}\right\} \Rightarrow H \text{ μέσο της } \Gamma O \quad \textit{(§ 5.6 Θεώρημα II)}$$



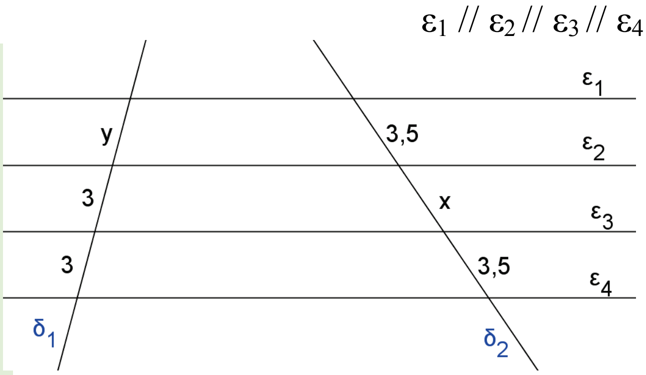
$\Gamma H = \frac{\Gamma O}{2} = \frac{\frac{A\Gamma}{2}}{2} = \frac{\frac{A\Gamma}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{A\Gamma}{4}$. Είναι $\Gamma O = \frac{A\Gamma}{2}$ γιατί οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

Κ1iii Να υπολογίσετε τα x και y.



Από Θεώρημα ΙΙ το Ε μέσο της ΑΒ οπότε x=1,5.Αφού Δ μέσο ΑΓ και Ε μέσο ΑΒ από Θεώρ.Ι y=2·2,5=5

Αφού οι παράλληλες ε_2, ε_3 και ε_4 ορίζουν ίσα τμήματα στην δ_1, από Θ ΙΙΙ θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην δ_2 οπότε **x=3,5**



Αφού οι παράλληλες ε_1, ε_2 και ε_3 ορίζουν ίσα τμήματα στην δ_2 από Θ ΙΙΙ θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην δ_1 οπότε **y=3**