5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου ΛΥΣΕΙΣ *(version 9-3-2016)*

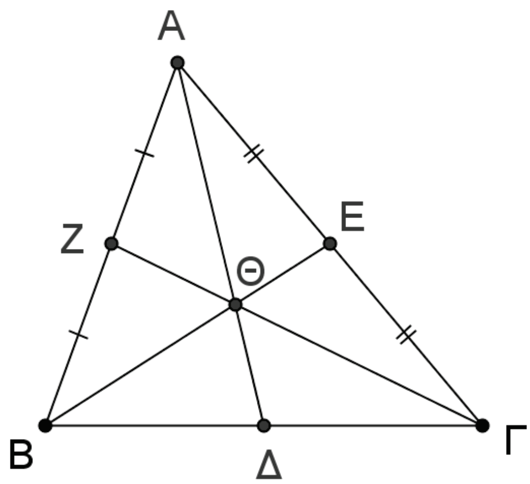
Θεώρημα

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου

i) διέρχονται από το ίδιο σημείο (συντρέχουν)

ii) Η απόσταση του σημείου αυτού από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

● Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται **βαρύκεντρο (ή κέντρο βάρους)** του τριγώνου.



$\Theta\Delta = \frac{A\Theta}{2}$, $\quad A\Theta = 2\Theta\Delta$, $\quad A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta$, $\quad \Theta\Delta = \frac{1}{3}A\Delta$

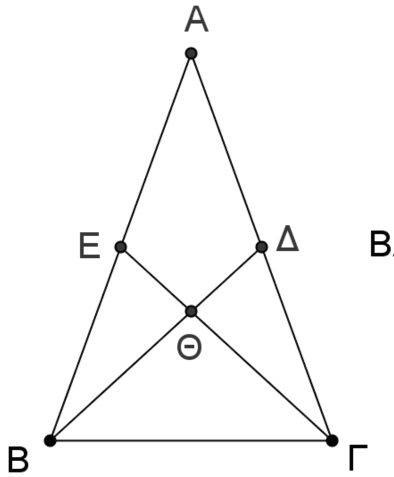
Όμοια:

$\Theta E = \frac{B\Theta}{2}$, $\quad B\Theta = 2\Theta E$, $\quad B\Theta = \frac{2}{3}BE$ και $\Theta E = \frac{1}{3}BE$

$\Theta Z = \frac{\Theta\Gamma}{2}$, $\quad \Gamma\Theta = 2\Theta Z$, $\quad \Gamma\Theta = \frac{2}{3}\Gamma Z$ και $\Theta Z = \frac{1}{3}\Gamma Z$

Ε5. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$.* *(μ_β διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά β δηλαδή μ_β=ΒΔ)*

Λύση



Είναι $B\Delta = \Gamma E \Leftrightarrow \frac{2}{3}B\Delta = \frac{2}{3}\Gamma E \Leftrightarrow B\Theta = \Gamma\Theta$

$B\Delta = \Gamma E \Leftrightarrow \frac{1}{3}B\Delta = \frac{1}{3}\Gamma E \Leftrightarrow \Theta\Delta = \Theta E$

Τα τρίγωνα ΘΕΒ και ΘΔΓ έχουν:

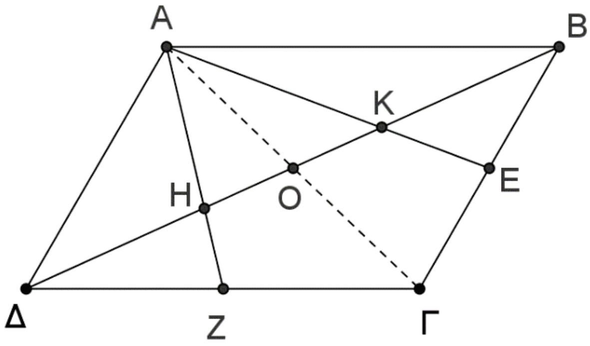
$$\left.\begin{array}{l} B\Theta = \Gamma\Theta \\ \hat{\Theta}_1 = \hat{\Theta}_2 \text{ κατα κορυφήν} \\ \Theta E = \Theta\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi\Gamma\Pi \text{ είναι ίσα οπότε}$$

$BE = \Gamma\Delta \Rightarrow 2BE = 2\Gamma\Delta \Rightarrow AB = A\Gamma \Rightarrow A\Gamma = AB \Rightarrow \beta = \gamma$.

A5. *Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΑΕ και ΑΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΒΔ.*

Λύση:

Φέρνουμε την διαγώνιο ΑΓ.Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ως γνωστόν διχοτομούνται οπότε Ο μέσο της ΑΓ, δηλαδή στο τρίγωνο ΔΑΓ η ΔΟ είναι διάμεσος.Επειδή και ΑΖ διάμεσος το Η είναι το βαρύκεντρο και μάθαμε πως $\mathrm{\Delta H} = \frac{2}{3}\mathrm{\Delta O}$.Επειδή το Ο είναι μέσο και της διαγωνίου ΒΔ έχουμε:



$$\mathrm{\Delta H} = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\mathrm{\Delta B} = \frac{1}{3}\mathrm{\Delta B}$$

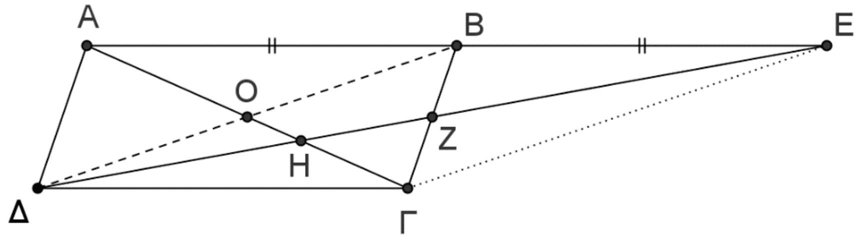
- Με το ίδιο σκεπτικό εργαζόμενοι στο τρίγωνο ΑΒΓ δείχνουμε ότι: $\mathrm{BK} = \frac{1}{3}\mathrm{\Delta B}$

Είναι $\mathrm{HK} = \mathrm{\Delta B} - \mathrm{\Delta H} - \mathrm{BK} = \mathrm{\Delta B} - \frac{1}{3}\mathrm{\Delta B} - \frac{1}{3}\mathrm{\Delta B} = \frac{1}{3}\mathrm{\Delta B}$

Αρα οι ΑΕ και ΑΖ τριχοτομούν την διαγώνιο ΒΔ.

Α7. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΑΒ. Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Η και τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι **i)** ΒΖ = ΖΓ, **ii)** $\Gamma H = \frac{AH}{2}$

Λύση:



i) Αφού ΒΕ=ΑΒ=ΓΔ θα είναι ΒΕ=//ΔΓ, οπότε *(κριτήριο ii)* το τετράπλευρο ΒΕΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.Επομένως οι διαγώνιοί του διχοτομούνται δηλαδή ΒΖ=ΖΓ.

ii) Φέρουμε την διαγώνιο ΒΔ και έστω Ο το σημείο τομής της με την ΑΓ. Επειδή οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται, στο τρίγωνο ΒΔΓ η ΓΟ είναι διάμεσος, οπότε το Η είναι βαρύκεντρο, άρα $\Gamma H = \frac{2}{3}\frac{1}{2}A\Gamma = \frac{1}{3}A\Gamma$

$$AH = A\Gamma - \Gamma H = A\Gamma - \frac{1}{3}A\Gamma = \frac{2}{3}A\Gamma = 2\frac{1}{3}A\Gamma = 2\Gamma H$$

Δείξαμε $AH = 2\Gamma H \Leftrightarrow 2\Gamma H = AH \Leftrightarrow \Gamma H = \frac{AH}{2}$

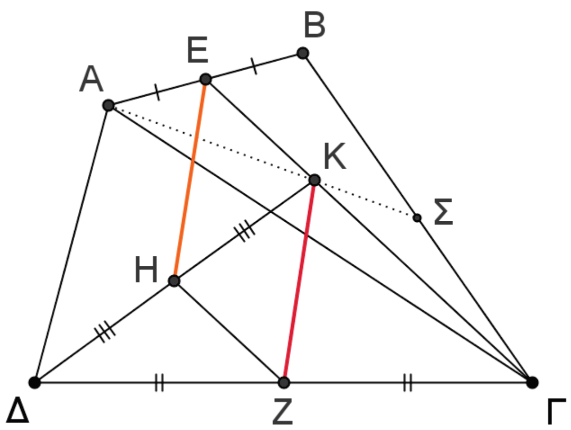
β' τρόπος

Αφού ΑΒ//ΔΓ από βασική εφαρμογή του Θαλή:

ii) $\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{AE}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{AH}{H\Gamma} = \frac{AE}{AB} \Leftrightarrow \frac{AH}{H\Gamma} = \frac{AE}{AB} \Leftrightarrow \frac{AH}{H\Gamma} = \frac{2AB}{AB} \Leftrightarrow \frac{AH}{H\Gamma} = 2 \Leftrightarrow 2H\Gamma = AH \Leftrightarrow H\Gamma = \frac{AH}{2}$

Σ3. *Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ θεωρούμε το βαρύκεντρο Κ του τριγώνου ΑΒΓ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΓΔ και ΚΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΕΗ//ΚΖ.*

Λύση:



Στο τρίγωνο ΚΔΓ έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} Z \text{ μέσο } \Delta\Gamma \\ H \text{ μέσο } \Delta K \end{matrix}\right\} \Rightarrow ZH = // \frac{K\Gamma}{2} \quad \textbf{(1)}$$

Ομως στο τρίγωνο ΑΒΓ αφού το Κ βαρύκεντρο θα ισχύει:

$$EK = \frac{K\Gamma}{2} \quad \textbf{(2)}$$

Από **(1)** και **(2)** παίρνουμε: $ZH = // EK$

Αρα το ΕΚΖΗ *(αφού έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες)* είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι και ΕΗ//ΚΖ.