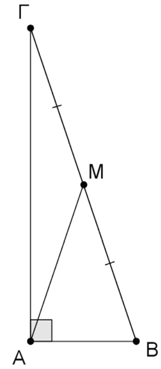
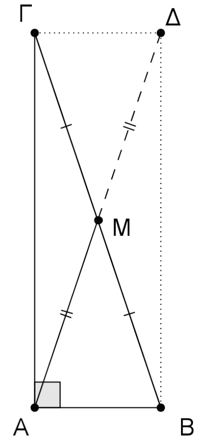
§5.9 Θεώρημα Ι

Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.



Απόδειξη:



Εστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) και ΑΜ η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας.

Θα δείξουμε ότι $AM=\frac{\Gamma B}{2}$.

Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΑΜ.

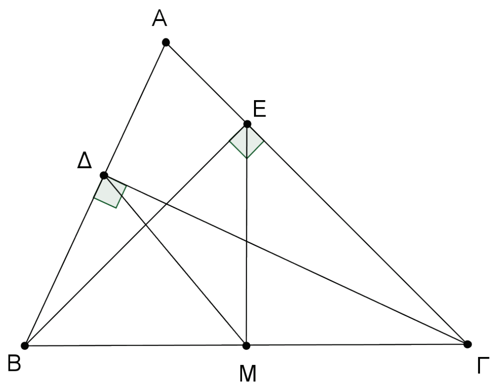
Για το τετράπλευρο ΓΔΒΑ έχουμε:

i) Επειδή οι διαγώνιοί του διχοτομούνται είναι παραλληλόγραμμο *(δες σχολικό κριτήριο για παραλληλόγραμμα (iv).)*

ii) Επειδή επιπλέον ($\hat{A}=90°$) είναι ορθογώνιο *(δες σχολικό Ορισμός «Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία ορθή).*

Αρα οι διαγώνιοί του είναι ίσες: *(Ιδιότητα του ορθογωνίου §5.3 σχολικό)*

$$A\Delta=\Gamma B \Leftrightarrow 2AM=\Gamma B \Leftrightarrow AM=\frac{\Gamma B}{2}$$



Ε3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ.*

Λύση:

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ, η ΔΜ είναι η διάμεσος που φέρνουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, οπότε *(§5.3 Θεώρημα Ι σχολικού)* είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.Δηλαδή :

$$\Delta M=\frac{B\Gamma}{2} \quad \textbf{(1)}$$

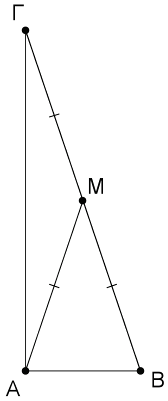
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ η ΕΜ είναι η διάμεσος που φέρνουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε *(Θεώρημα Ι σχολικού)* είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.Δηλαδή :

$$EM=\frac{B\Gamma}{2} \quad \textbf{(2)}$$

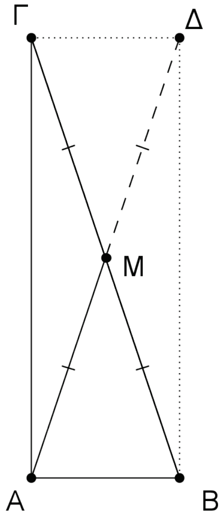
- Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι ΔΜ=ΕΜ.

§5.9 Θεώρημα ΙΙ

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.



Απόδειξη



Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και την διάμεσό του ΑΜ.Αν $AM=\frac{\Gamma B}{2}$ θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

Προεκτείνουμε την διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΑΜ.

Για το τετράπλευρο ΓΔΒΑ ισχύει:

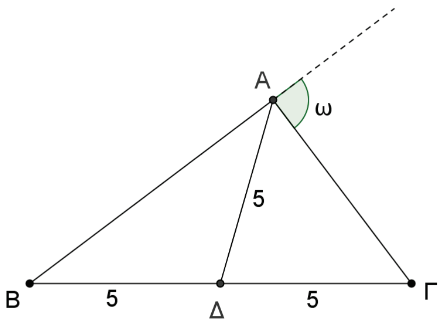
i) Είναι παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

ii) Επιπλέον $AM=\frac{\Gamma B}{2}\Leftrightarrow 2AM=\Gamma B\Leftrightarrow AM+AM=\Gamma B\Leftrightarrow AM+M\Delta=\Gamma B\Leftrightarrow A\Delta=B\Gamma$

δηλαδή οι διαγώνιες ΑΔ και ΒΓ του παραλληλογράμμου ΓΔΒΑ είναι ίσες, οπότε από γνωστό κριτήριο *(§5.3 κριτήριο ii)σχολικού)*, το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

Επομένως όλες οι γωνίες του θα είναι ορθές άρα και $\hat{A}=1$ ορθή.

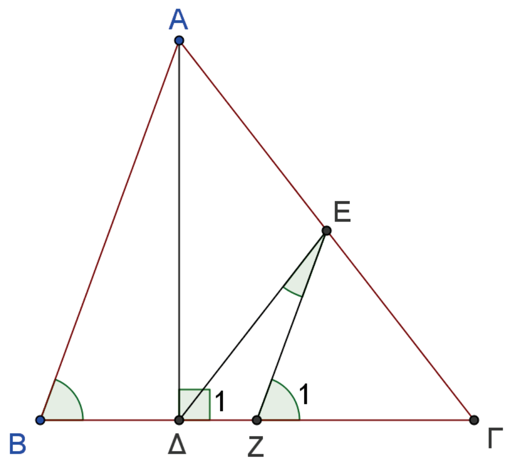
Κ1. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την γωνία ω.



Λύση:

Αφού η διάμεσος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, σύμφωνα με το Θεώρημα ΙΙ § 5.9, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^\circ$, οπότε αφού η ω είναι παραπληρωματική της $\hat{A}$ θα είναι και $\omega=90^\circ$.

Σ1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με Β > Γ φέρουμε το ύψος του ΑΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{E}Z=\hat{B}-\hat{\Gamma}$.



Λύση:

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$\left.\begin{matrix} E \text{ μέσο } A\Gamma \\ Z \text{ μέσο } B\Gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow EZ//AB$ *οπότε* $\hat{Z}_1=\hat{B}$ ***(1)*** *ως εντός εκτός και επί τα αυτά.*

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ η ΔΕ διάμεσος οπότε ΔΕ=ΕΓ, συνεπώς $\hat{\Delta}_1=\hat{\Gamma}$ *(2).*

Η γωνία $\hat{Z}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΖΕΔ οπότε:

$$\hat{Z}_1=\Delta\hat{E}Z+\hat{\Delta}_1\Leftrightarrow \Delta\hat{E}Z=\hat{Z}_1-\hat{\Delta}_1\overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow}\Delta\hat{E}Z=\hat{B}-\hat{\Gamma}$$