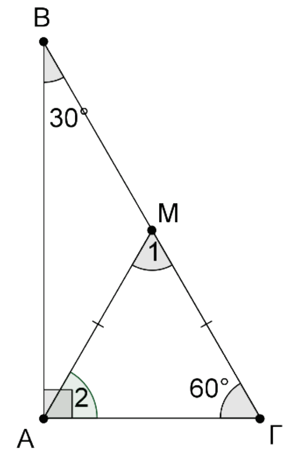
5.9. 2ο φυλλάδιο

§ 5.9 Πόρισμα

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη:



Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$.Θα αποδείξουμε ότι $A\Gamma = \frac{\Gamma B}{2}$.

Επειδή $\hat{B} = 30^\circ$, είναι $\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

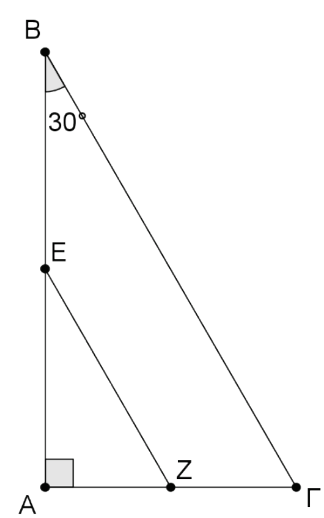
Φέρουμε την διάμεσο ΑΜ οπότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα *(§5.6Θεώρημα Ι)* είναι $AM = \frac{\Gamma B}{2} = M\Gamma$. Δηλαδή το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με βάση ΑΓ,οπότε όπως γνωρίζουμε *(§3.2 Πόρισμα Ι σελ 37 σχολικού)* οι προσκείμενες γωνίες στην βάση θα είναι ίσες δηλαδή $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Επειδή το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°, θα είναι και $\hat{M}_1 = 60^\circ$ δηλαδή όλες οι γωνίες του τριγώνου ΜΑΒ είναι ίσες με 60°, οπότε *(§3.11Πόρισμα iii) σελ 54 σχολικό)* το τρίγωνο ΜΑΒ θα είναι ισόπλευρο.

Αρα: $A\Gamma = M\Gamma = \frac{\Gamma B}{2}$.

Ε4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) με Β = 30°. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι ΕΖ=ΑΓ.*

Λύση:



Επειδή το Ε μέσο της ΑΒ και Ζ μέσο της ΑΓ θα είναι $EZ = \frac{B\Gamma}{2}$ ***(1)*** *(§5.6 Θεώρημα Ι σχολικού)*

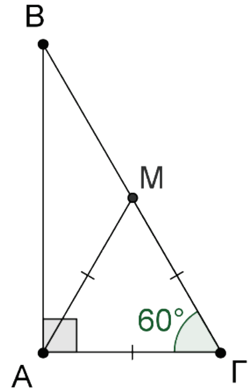
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 30^\circ$ *οπότε* $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ ***(2)*** *(§5.9 ΠΟΡΙΣΜΑ)*

Από ***(1)*** *και* ***(2)*** προκύπτει ότι *ΕΖ=ΑΓ.*

Πόρισμα (αντίστροφο)

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια κάθετη πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, τότε η απέναντι οξεία γωνία είναι 30° μοίρες.

Απόδειξη



Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$), με $A\Gamma=\frac{\Gamma B}{2}$.

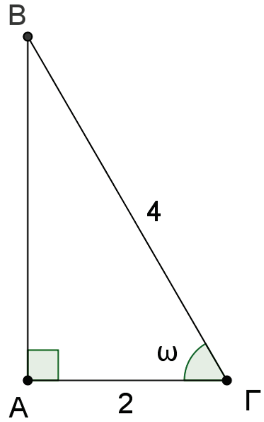
Θα αποδείξουμε ότι. $\hat{B}=30^\circ$.

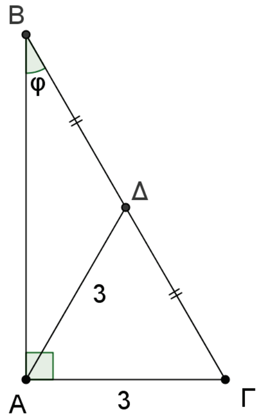
Φέρουμε την διάμεσο ΑΜ, οπότε $AM=\frac{B\Gamma}{2}=M\Gamma=A\Gamma$.

Αρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο, συνεπώς θα έχει όλες τις γωνίες του ίσες με 60°. *(ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ σ.37+ΠΟΡΙΣΜΑ iv) σ.84)* οπότε και $\hat{\Gamma}=60^\circ$.

Αρα $\hat{B}=90^\circ-\hat{\Gamma}=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

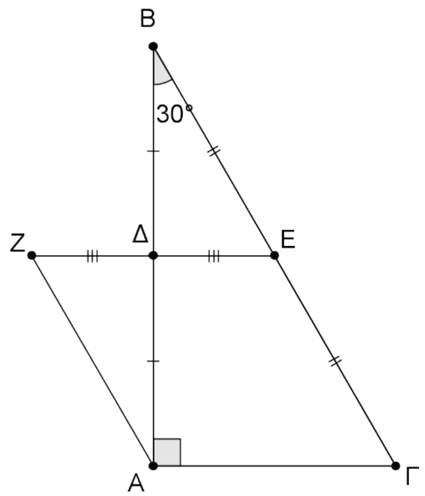
Κ2. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω.





Ε7. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) με Β = 30° και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΕΔ. Να αποδείξετε ότι το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.*

Λύση:



Επειδή Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα θα είναι

θα είναι $\Delta E//=\frac{A\Gamma}{2}\Leftrightarrow 2\Delta E//=A\Gamma\Leftrightarrow ZE//=A\Gamma$ *(Θεώρημα Ι σχολικού)*

Αρα (§5.2 κριτήριο ii) το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B}=30^\circ$ *οπότε* $A\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}=E\Gamma$

(§5.9 ΠΟΡΙΣΜΑ).

Επομένως σύμφωνα με τον ορισμό του ρόμβου (Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.σ101) *το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.*