ΘΕΜΑ 2 2822

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Η.

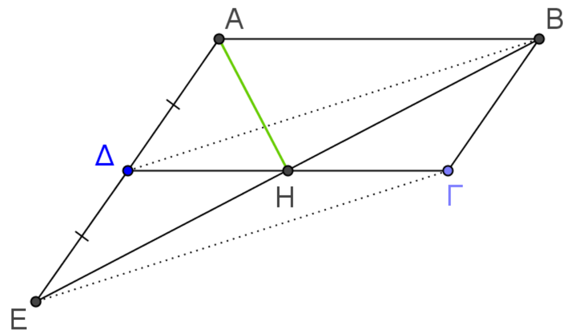
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) η ΑΗ είναι διάμεσος του ΒΑΕ τριγώνου. (Μονάδες 9)

Λύση:



α) Είναι ΑΕ=2ΑΔ=2ΒΓ=ΑΒ άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές (ΑΔ=ΒΓ γιατί οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες)

β) Είναι ΔΕ=ΑΔ=ΒΓ και αφού ΑΔ//ΒΓ θα είναι και ΔΕ//ΒΓ.Δηλαδή ΔΕ=//ΒΓ

Αρα το ΔΕΓΒ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες οπότε από γνωστό κριτήριο είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αφού ΔΕΓΒ παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται οπότε ΕΗ=ΗΒ οπότε Η μέσο του ΕΒ και συνεπώς η ΑΗ είναι διάμεσος του ΑΕΒ.

Δημήτρης Αθανασίου (Μαθηματικός) asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

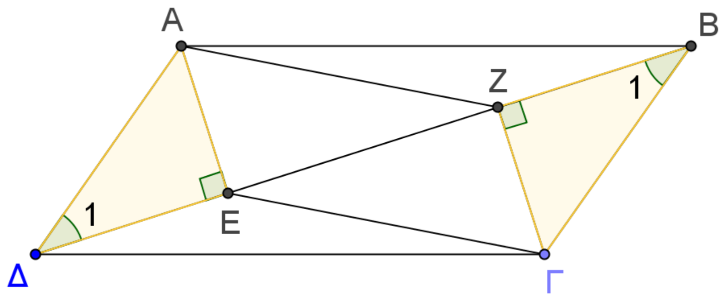
ΘΕΜΑ 2 2827

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

Λύση:



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{Z}} = 90^\circ \\ \mathrm{A\Delta} = \mathrm{B\Gamma} \text{ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου} \\ \hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Delta}_1 \text{ ως εντός εναλλάξ} \end{array}\right\}$$

Αρα από §3.6 Θεώρημα Ι είναι ίσα.

β) Από την ισότητα των τριγώνων παίρνουμε ΑΕ=ΓΖ.

Επιπλέον ΑΕ//ΓΖ ως κάθετες στην ΒΓ (§4.6 Πόρισμα Ι).

Αρα είναι ΑΕ=//ΓΖ οπότε από γνωστό κριτήριο (ii) το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 2   2834

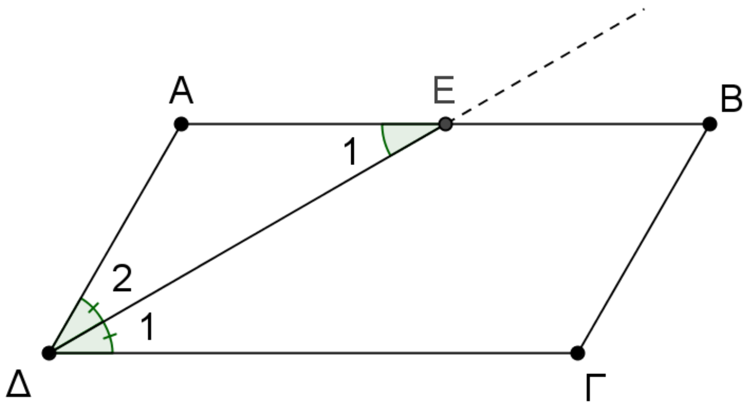
Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΒ=2ΑΔ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

Λύση:



α) $\left.\begin{array}{l}\hat{\Delta}_2=\hat{\Delta}_1 \text{ επειδή ΔΕ διχοτόμος}\\ \hat{\Delta}_1=\hat{E}_1 \text{ ως εντός εναλλάξ}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{\Delta}_2=\hat{E}_1$ άρα ΑΔΕ ισοσκελές

β) Αφού ΑΔΕ ισοσκελές είναι ΑΔ=ΑΕ.Από τα δεδομένα ΑΒ=2ΑΔ επομένως

$AB=2AE \Leftrightarrow AE+EB=2AE \Leftrightarrow EB=2AE-AE \Leftrightarrow EB=AE$ που σημαίνει ότι το Ε μέσο του ΑΒ.

ΘΕΜΑ 2   2836

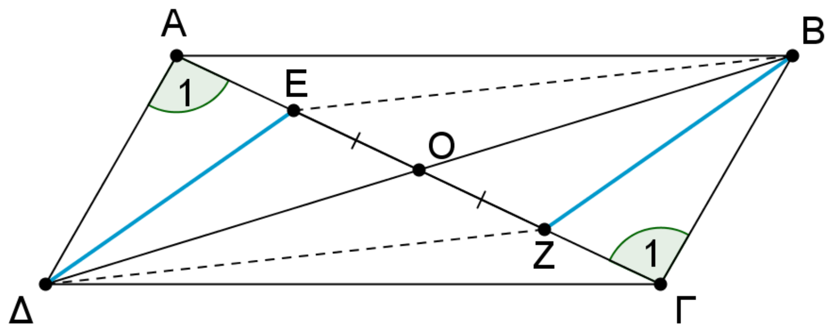
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε ΟΕ=ΟΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΕ=ΒΖ (Μονάδες 12)

β) το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

Λύση:



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ.Αυτά έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A\Delta = B\Gamma} \text{ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου} \\ \hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 \text{ ως εντός εναλλάξ} \\ \mathrm{AE = OA - EO = O\Gamma - OZ = Z\Gamma} \text{ (ΟΑ=ΟΓ γιατί οι διαγώνιοι του} \\ \text{παραλληλογράμμου διχοτομούνται)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Π-Γ-Π είναι ίσα.Αρα θα έχουν και ΔΕ=ΒΖ}$$

β) Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε ΟΒ=ΟΔ.

Επιπλέον, από υπόθεση ΟΕ=ΟΖ.Αρα οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΕΒΖΔ διχοτομούνται, οπότε από γνωστό κριτήριο είναι παραλληλόγραμμο.

Δημήτρης Αθανασίου (Μαθηματικός) asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

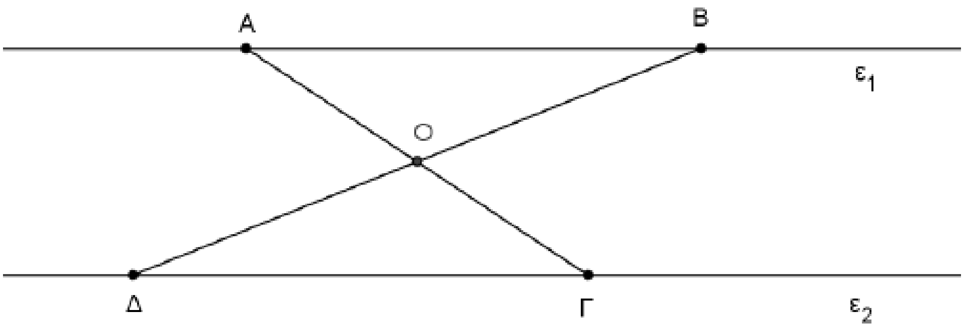
ΘΕΜΑ 2 5129

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και το σημείο Ο είναι το μέσο της ΒΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους. (Μονάδες 12)

β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



Λύση:

α) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ ως κατακορυφήν} \\ OB = O\Delta \text{ από δεδομένα} \\ \hat{B} = \hat{\Delta} \text{ ως εντός εναλλάξ} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Γ-Π-Γ είναι ίσα,}$$

β) Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{\Gamma} \\ OA = O\Gamma \\ AB = \Delta\Gamma \end{array}\right\}$$

Αρα το ΑΓΒΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές (ΑΒ, ΓΔ) ίσες και παράλληλες.

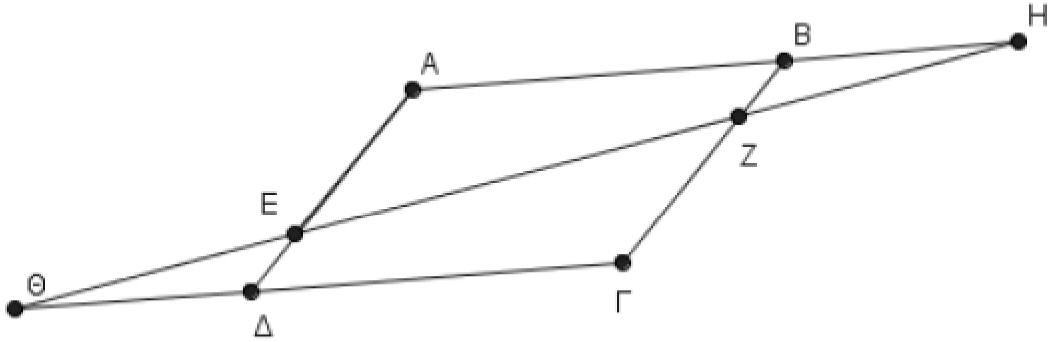
ΘΕΜΑ 2 5108

Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια ώστε ΑΕ=ΓΖ . Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι:

α) $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$ (Μονάδες 8)

β) $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$ (Μονάδες 8)

γ) ΒΗ=ΘΔ (Μονάδες 9)



Λύση:

α) Είναι $\hat{B} = \hat{\Delta}$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

Αρα : $H\hat{B}Z = 180° - \hat{B} = 180° - \hat{\Delta} = E\hat{\Delta}\Theta$

β' τρόπος *(από Δ.Τ.)*

$$\left.\begin{array}{l} E\hat{\Delta}\Theta = \hat{A} \text{ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ} \\ \hat{A} = H\hat{B}Z \text{ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ} \end{array}\right\} \Rightarrow E\hat{\Delta}\Theta = H\hat{B}Z$$

β) Είναι $B\hat{Z}H = E\hat{Z}\Gamma$ (1) ως κατακορυφήν

$E\hat{Z}\Gamma = \Delta\hat{E}\Theta$ (2) ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΒΓ και ΑΔ που τέμνονται από την ΕΖ.

Αρα από (1) και (2) $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$.

γ) Συγκρίνουμε τα τρίγων ΕΔΘ και ΖΒΗ.

Επειδή ΑΔ=ΒΓ (ως απένταναι πλευρές παραλληλογράμμου) και ΑΕ=ΓΖ από τα δεδομένα.

Αρα ΕΔ=ΑΔ-ΕΑ=ΒΓ-ΓΖ=ΒΖ

Ετσι τα τρίγωνα έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta \\ E\Delta = BZ \\ B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Γ-Π-Γ είναι ίσα οπότε και ΘΔ=ΒΗ.