

6. Εγγεγραμμένα Σχήματα

Αθανασίου Δημήτρης (Μαθηματικός)
asepfreedom@yahoo.gr

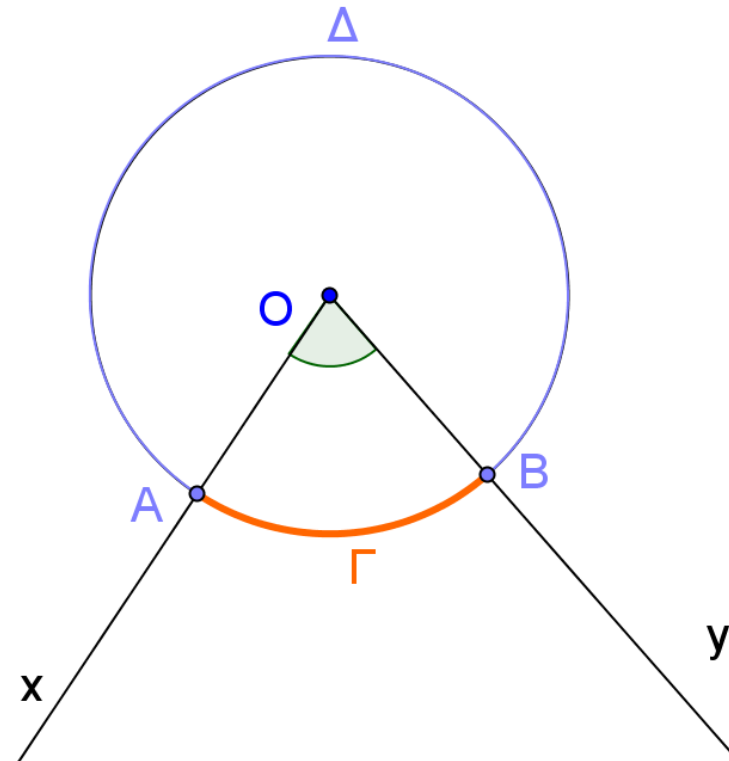
Επίκεντρη γωνία

- Μια γωνία λέγεται **επίκεντρη** γωνία ενός κύκλου αν η κορυφή της είναι το κέντρο του κύκλου.

Το τόξο ΑΓΒ που περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας και έχει άκρα τα Α, Β λέγεται **αντίστοιχο**

τόξο της επίκεντρης γωνίας.

Επίσης, λέμε ότι η επίκεντρη γωνία $\widehat{ΑΟΒ}$ **βαίνει** στο τόξο ΑΓΒ.

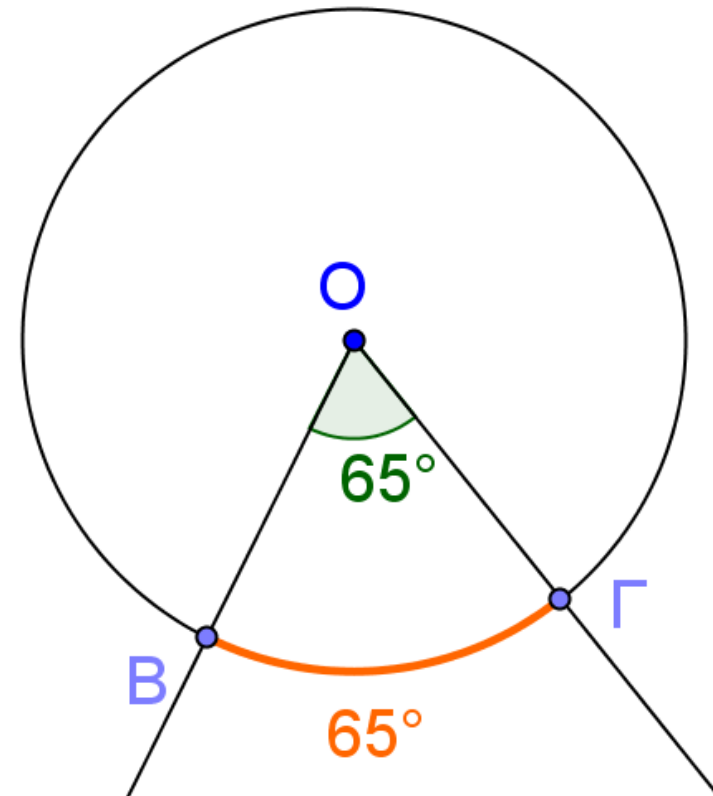


Μέτρο επίκεντρης γωνίας

- Υπενθυμίζουμε ότι το μέτρο μιας επίκεντρης γωνίας ορίζεται να είναι το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει. *(σ. 27 Σχολικού)*

Έτσι για παράδειγμα:

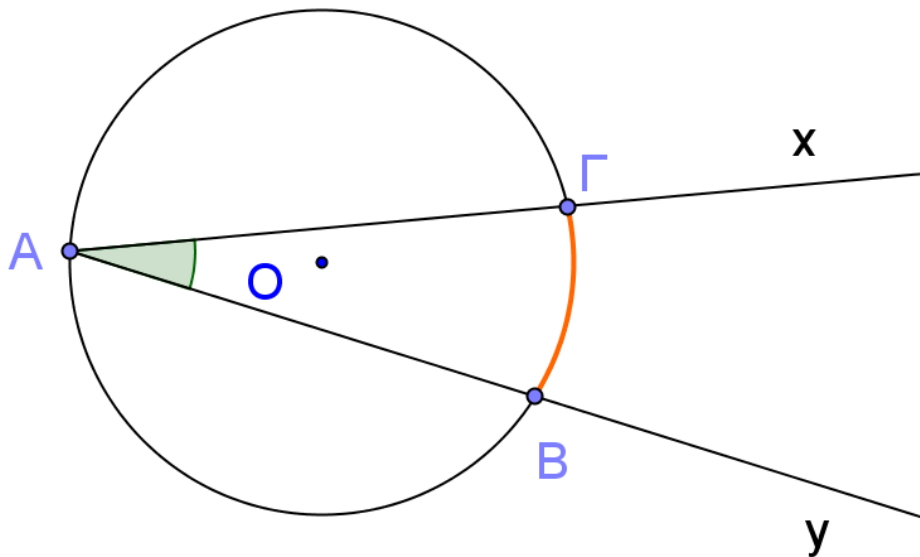
- Αν το τόξο στο οποίο βαίνει μιά επίκεντρη γωνία είναι 65° μοίρες και η επίκεντρη γωνία θα είναι 65° μοίρες
και αντίστροφα
- Αν μια επίκεντρη γωνία είναι 65° μοίρες και το αντίστοιχο τόξο της θα είναι 65° μοίρες .



Εγγεγραμμένη γωνία

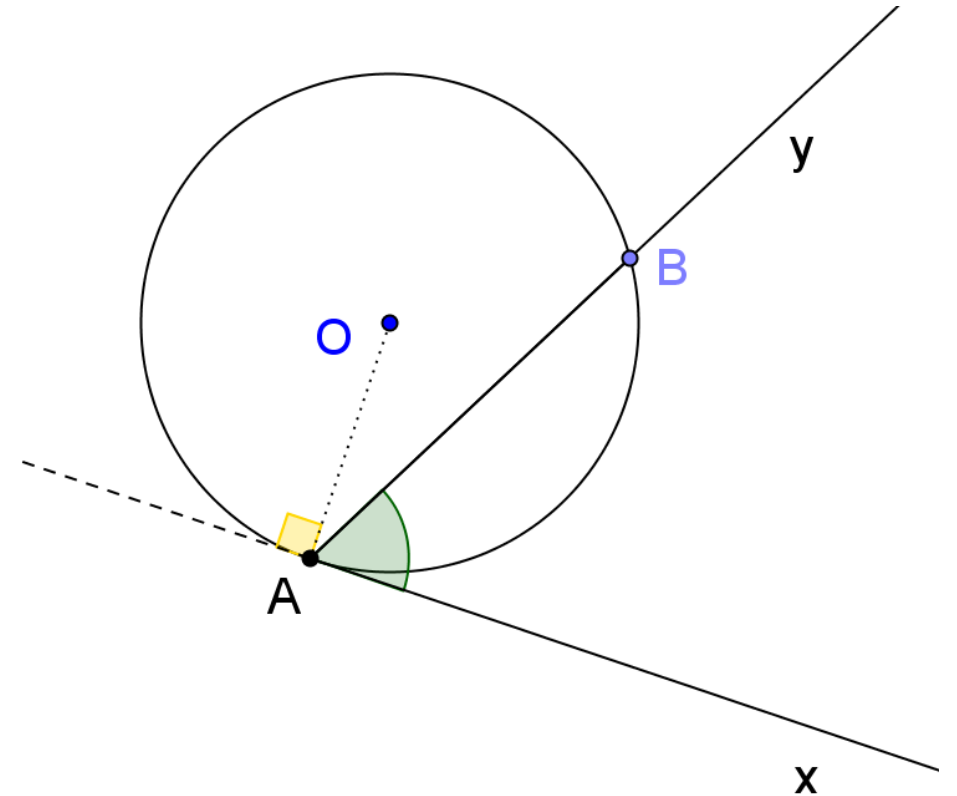
Μια γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη** γωνία ενός κύκλου, αν η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.

Το τόξο ΒΓ που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο** τόξο της ή διαφορετικά λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία \hat{A} **βαίνει** στο τόξο ΒΓ.



Γωνία χορδής και εφαπτομένης

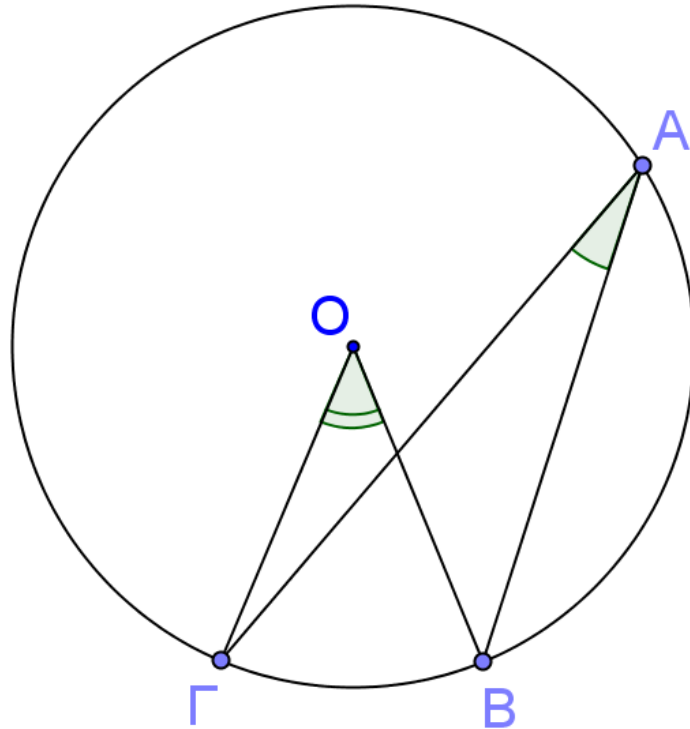
- Μια γωνία λέγεται **γωνία χορδής και εφαπτομένης**, αν:
 - α. η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου,
 - β. η μία πλευρά της είναι τέμνουσα του κύκλου και
 - γ. η άλλη πλευρά της εφαπτομένη του κύκλου.



Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

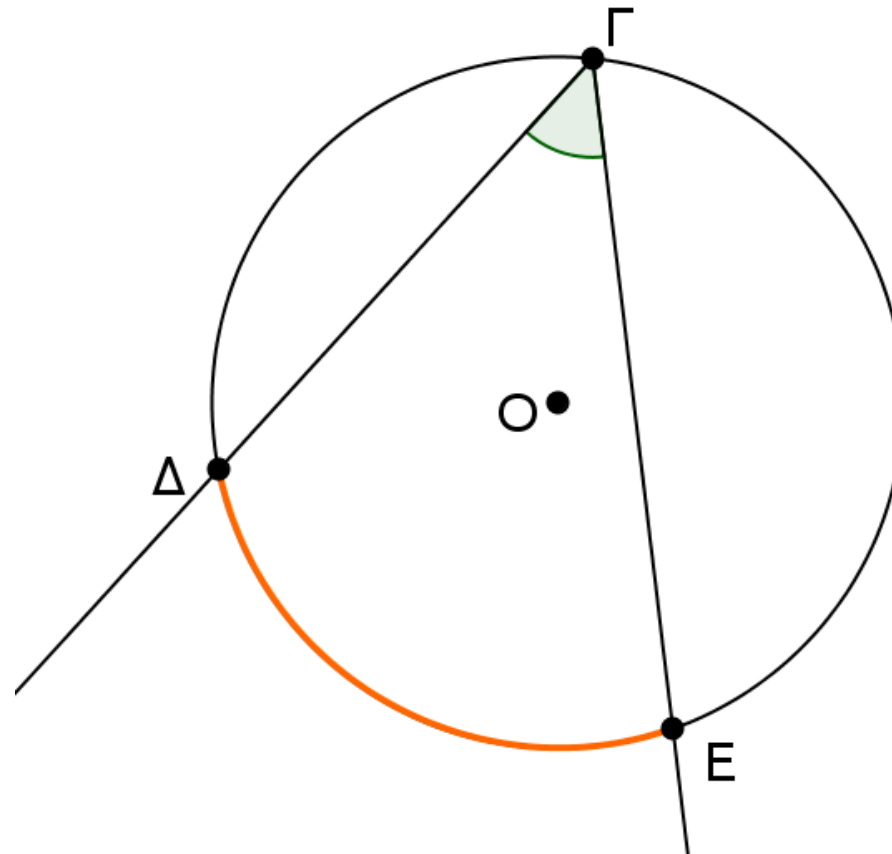
$$\hat{\Gamma A B} = \frac{\hat{\Gamma O B}}{2}$$



ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ_i

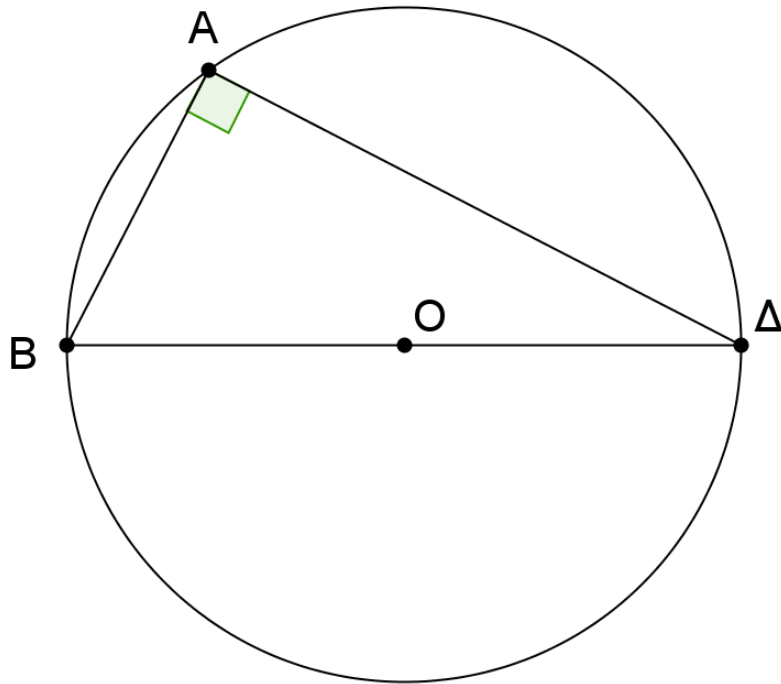
- Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

$$\hat{\Gamma} = \frac{\widehat{(\Delta E)}}{2}$$



ΠΟΡΙΣΜΑ_ii

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

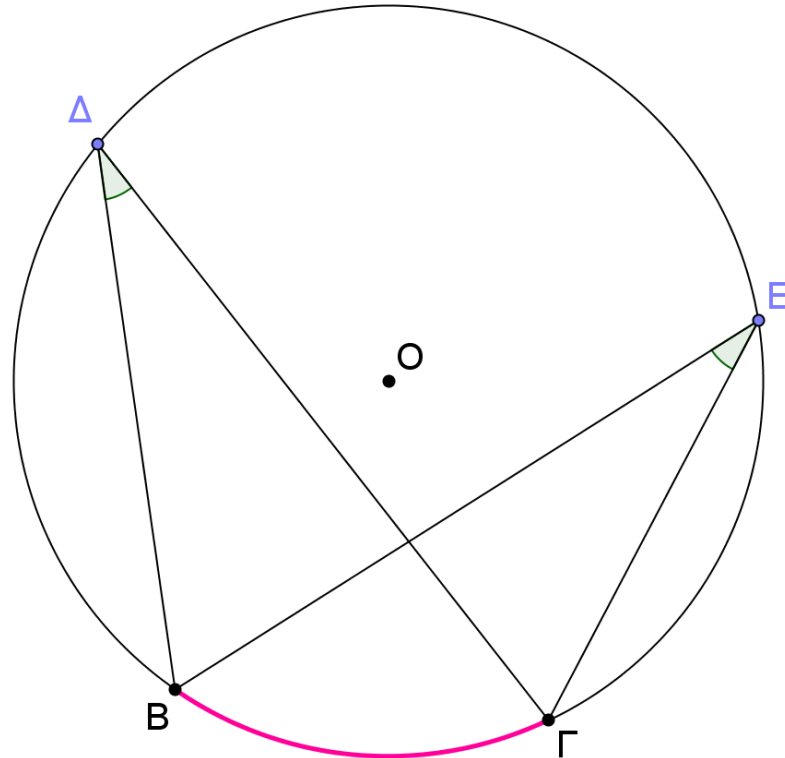


- Σημείωση:** Σε κύκλο λοιπόν να έχουμε ετοιμότητα να «βλέπουμε» δύο ορθές γωνίες
1. Αυτή που σχηματίζεται από εφαπτομένη και την ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής.
 2. Εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Πόρισμα_iii

- Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο (ή σε ίσα τόξα) του ίδιου (ή ίσων κύκλων) είναι ίσες και αντίστροφα.

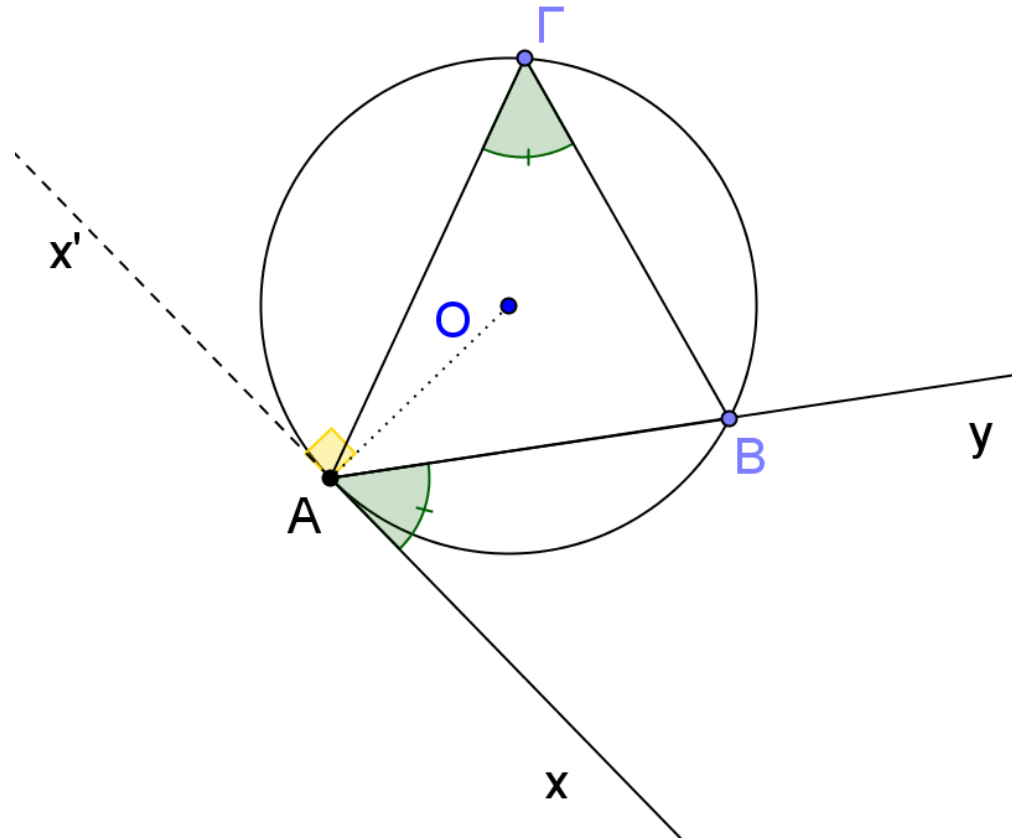
$$\hat{\Delta} = \hat{E}$$



6.3 Θεώρημα σ.124

Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

$$\widehat{x\hat{A}y} = \widehat{A\hat{\Gamma}B}$$



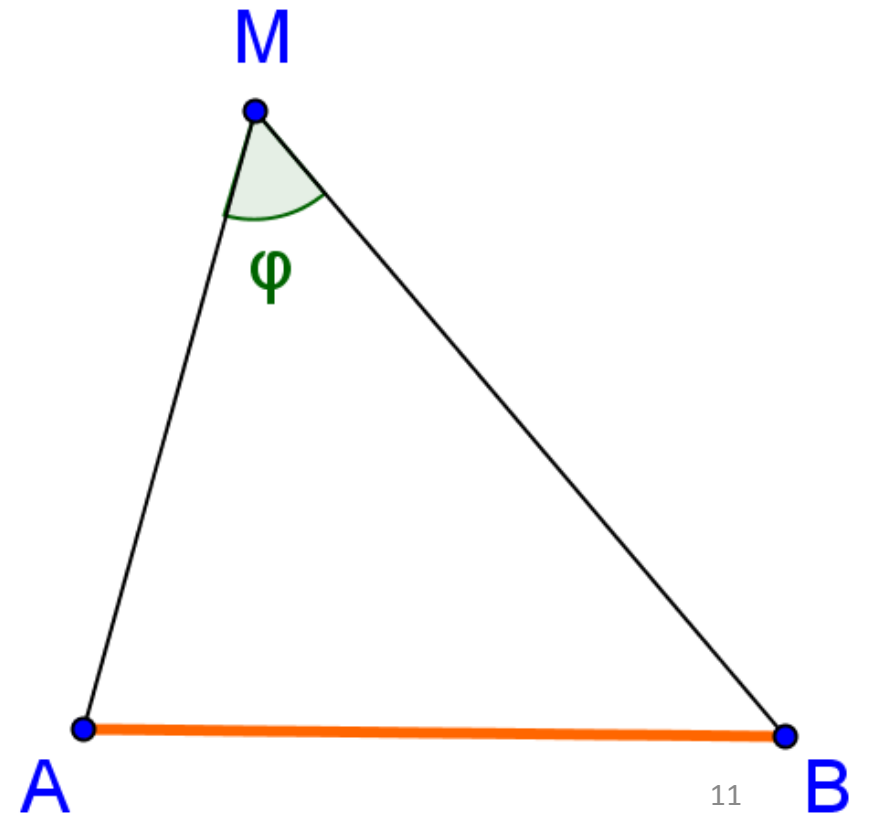
Ορολογία (δες σ.126 σχολικό)

Εστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα σημείο M που δεν ανήκει στην ευθεία AB .

Αν ϕ συμβολίσουμε την γωνία \widehat{AMB} τότε λέμε ότι:

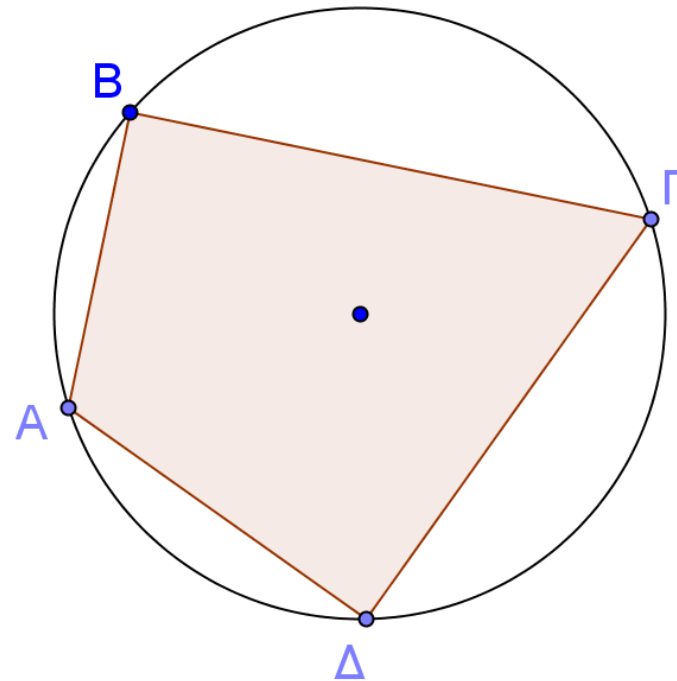
το σημείο M **βλέπει το τμήμα AB** υπό γωνία ϕ ή ισοδύναμα

ότι το AB **φαίνεται** από το σημείο M υπό γωνία ϕ .



6.5 Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

- Ορισμός
- Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγεγραμμένο σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου .



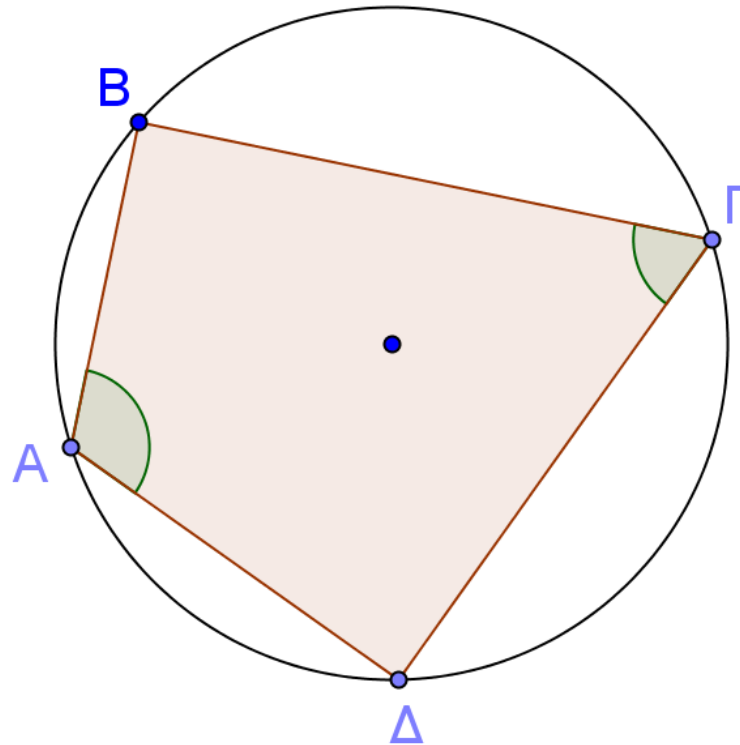
Θεώρημα

- Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

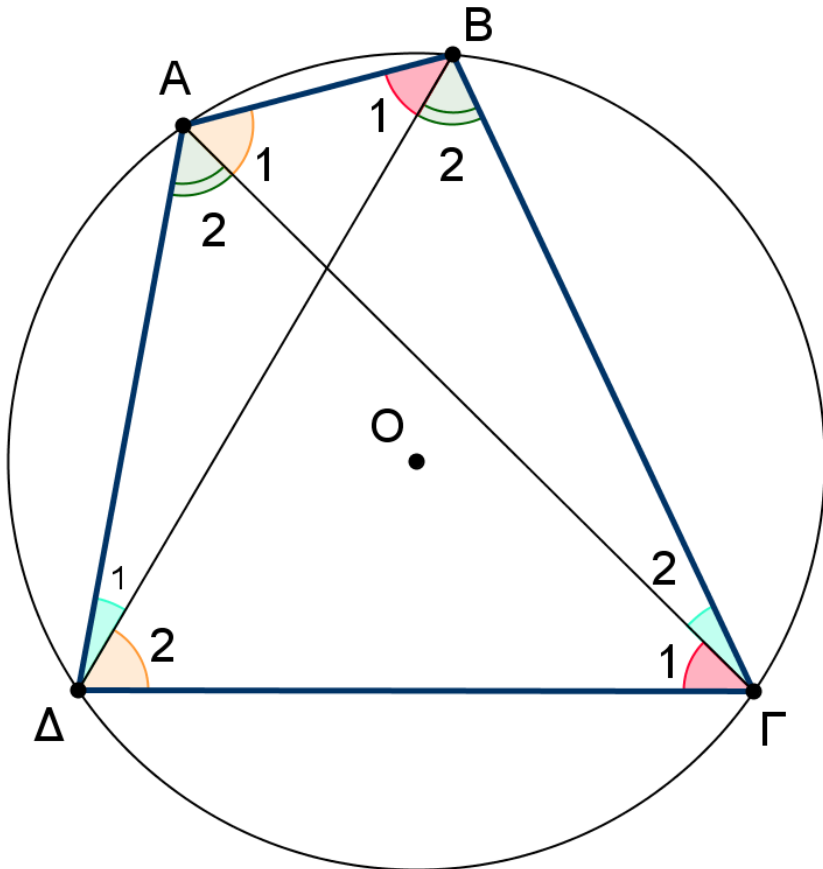
(i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

$$\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ$$



- (ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.



Η πλευρά ΔΓ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές A και B υπό ίσες γωνίες

$$\hat{A}_2 = \hat{B}_2$$

Η πλευρά ΒΓ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και Α υπό ίσες γωνίες

$$\hat{\Delta}_2 = \hat{A}_1$$

Η πλευρά ΑΒ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και Γ υπό ίσες γωνίες

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2$$

Η πλευρά ΑΔ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Β και Γ υπό ίσες γωνίες

$$\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_1$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

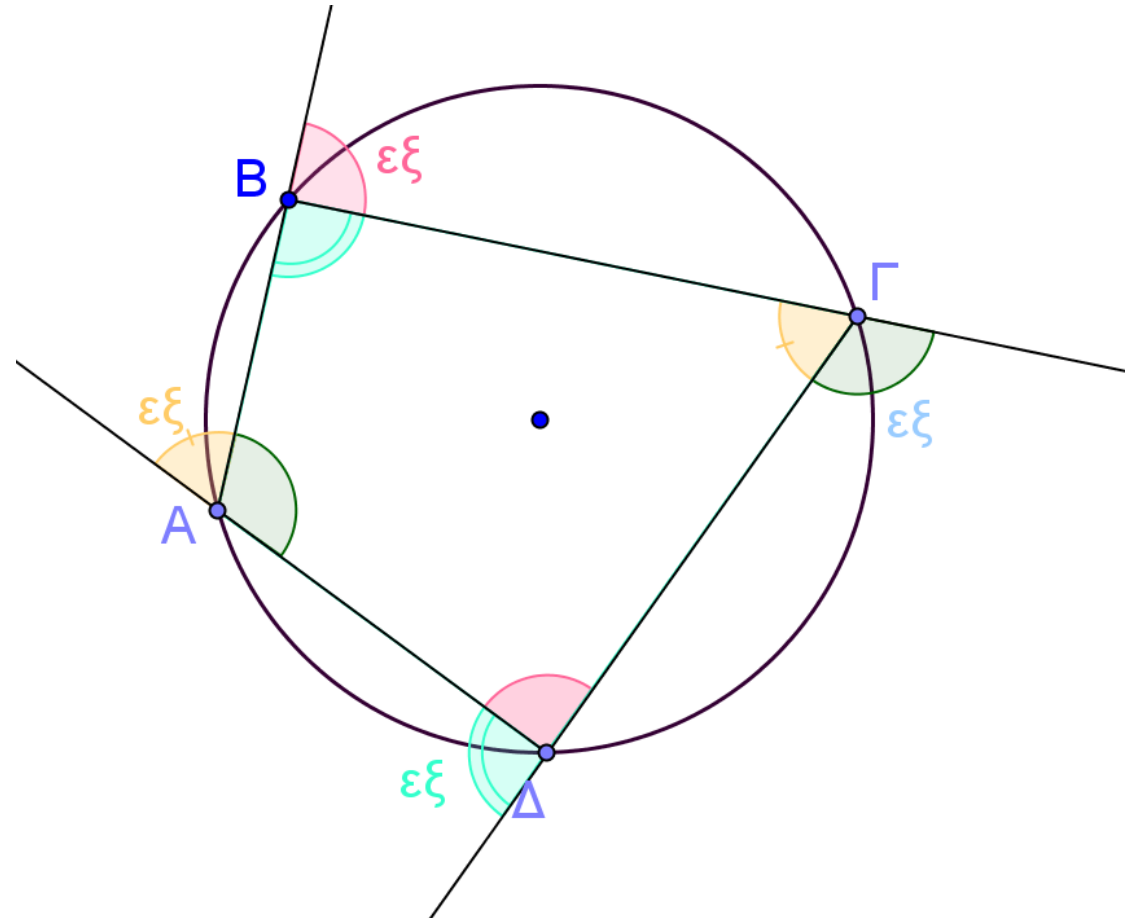
Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

$$\hat{A} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$$

$$\hat{B} = \hat{\Delta}_{\varepsilon\xi}$$

$$\hat{\Gamma} = \hat{A}_{\varepsilon\xi}$$

$$\hat{\Delta} = \hat{B}_{\varepsilon\xi}$$



6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο

- Ορισμός
- Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.
- Αρα ένα εγγράψιμο τετράπλευρο είναι εν δυνάμει (δυνητικά) εγγεγραμμένο.
Δεν φαίνεται κύκλος που να διέρχεται από τις κορυφές του αλλά μπορεί να σχεδιαστεί.

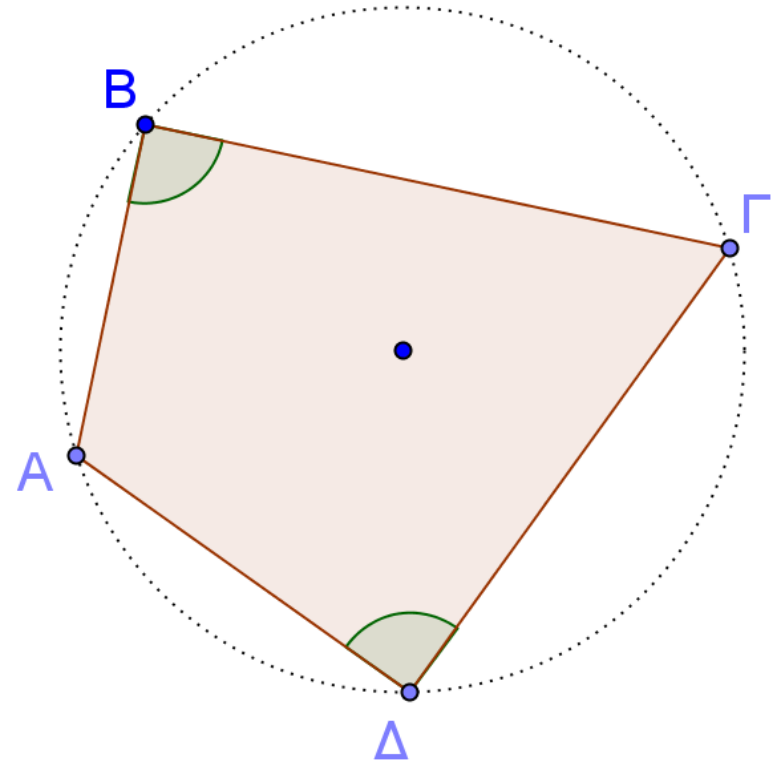
1ο κριτήριο εγγραψιμότητας τετραπλεύρου

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν :

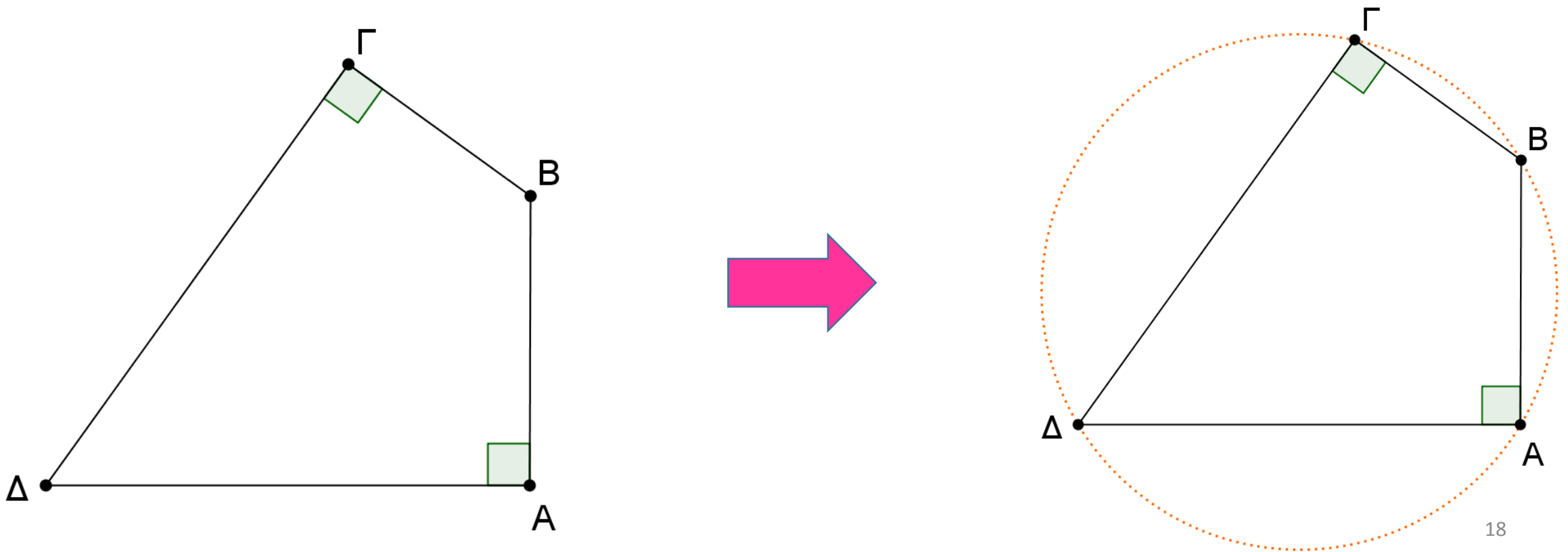
- (i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

Αν $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ τότε ΑΒΓΔ εγγράψιμο

Αν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ τότε ΑΒΓΔ εγγράψιμο

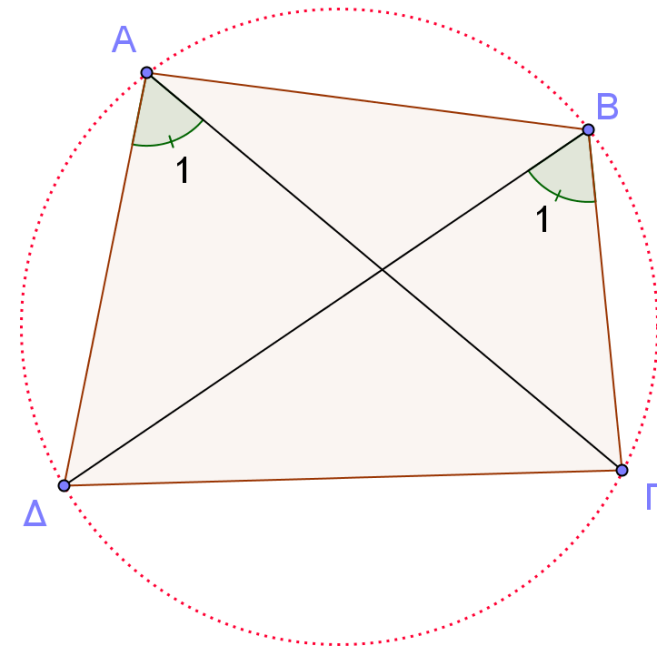
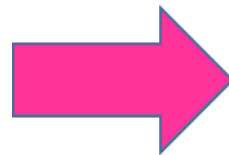
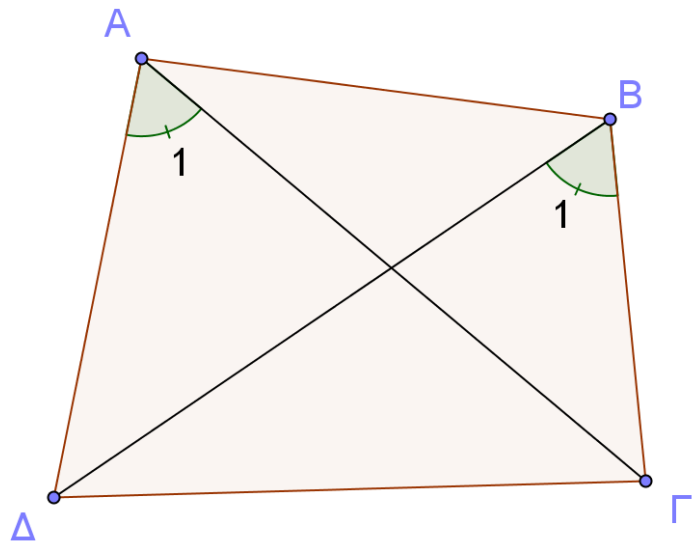


Βασική περίπτωση: Αν ένα τετράπλευρο έχει δύο απέναντι γωνίες ορθές τότε είναι εγγράψιμο αφού δύο όρθες γωνίες έχουν άθροισμα $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ δηλαδή είναι παραπληρωματικές.

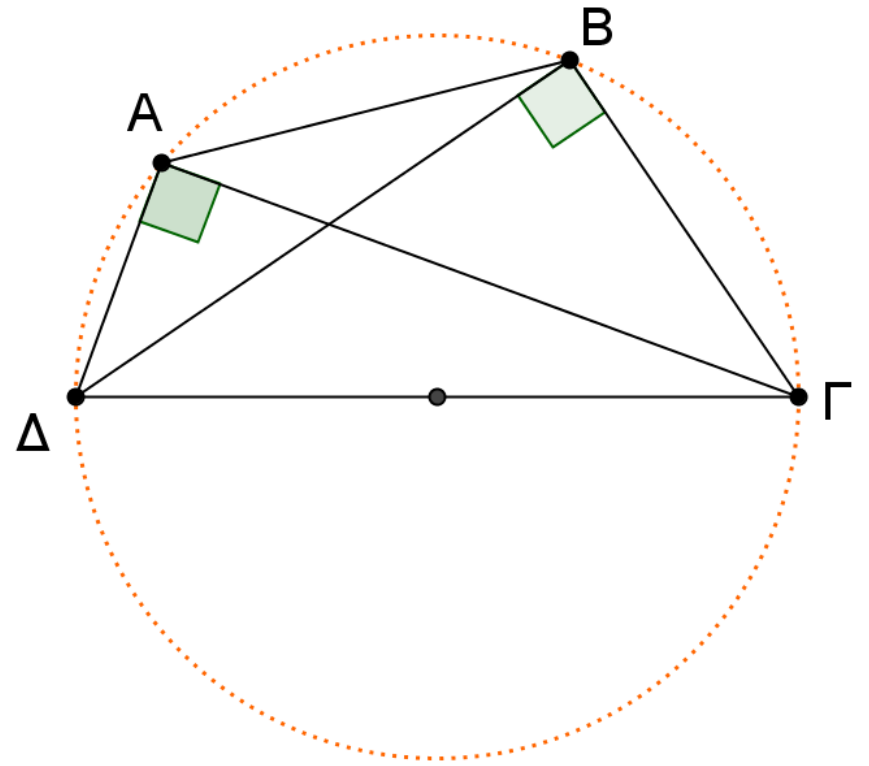
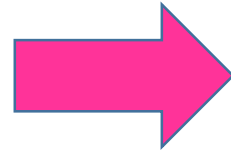
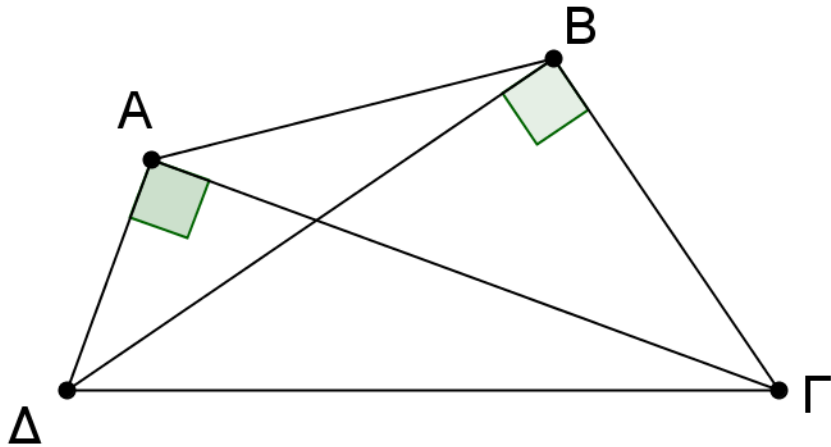


2^ο κριτήριο εγγραψιμότητας τετραπλεύρου

- Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν :
- (ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

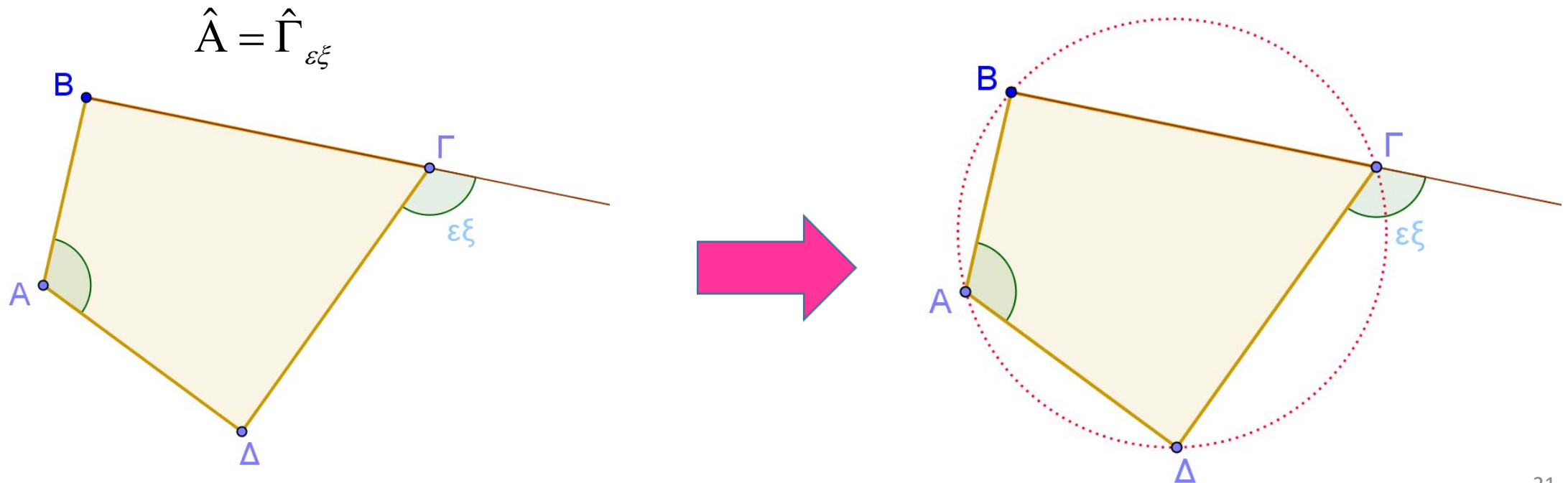


Βασική περίπτωση: Αν σ' ένα τετράπλευρο μια πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ορθές γωνίες τότε είναι εγγράψιμο.



3^ο κριτήριο εγγραψιμότητας τετραπλεύρου

- Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν :
- (iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.



Σημαντική παρατήρηση:

- Αν δείξουμε χρησιμοποιώντας κάποιο από τα 3 κριτήρια ότι ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο, τότε θα έχει όλες τις ιδιότητες ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου.
- Για παράδειγμα αν δείξω ότι το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο γιατί έχει δύο απέναντι γωνίες παραπληρωματικές, τότε συμπεραίνω ότι:
 - 1. Έχει και τις άλλες δύο γωνίες παραπληρωματικές.
 - 2. Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
 - 3. Κάθε εξωτερική γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.
- Αυτά τα στοιχεία μπορούν να μας φανούν πολύτιμα στην λύση της άσκησης.

Τι αναζητούμε στο σχήμα της άσκησης

- Σε ασκήσεις σχετικές με εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα :
- Ελέγχουμε αν στο σχήμα μας υπάρχει κύκλος οπότε και ψάχνουμε για εγγεγραμμένα τετράπλευρα που έχουν όλες τις ιδιότητες που έχουμε αναφέρει.
- Επίσης ελέγχουμε αν υπάρχουν στο σχήμα μας άλλα τετράπλευρα τα οποία θα μπορούσαμε χρησιμοποιώντας κάποιο από τα 3 κριτήρια να δείξουμε ότι είναι εγγράψιμα, οπότε θα έχουν τις ιδιότητες των εγγεγραμμένων τετραπλεύρων.

Repetitio est mater studiorum =

Η επανάληψη είναι μήτηρ της μαθήσεως

(με απλά ελληνικά αν δεν το μάθατε ξαναδείτε το)

The end...

Thanks for watching!!!!