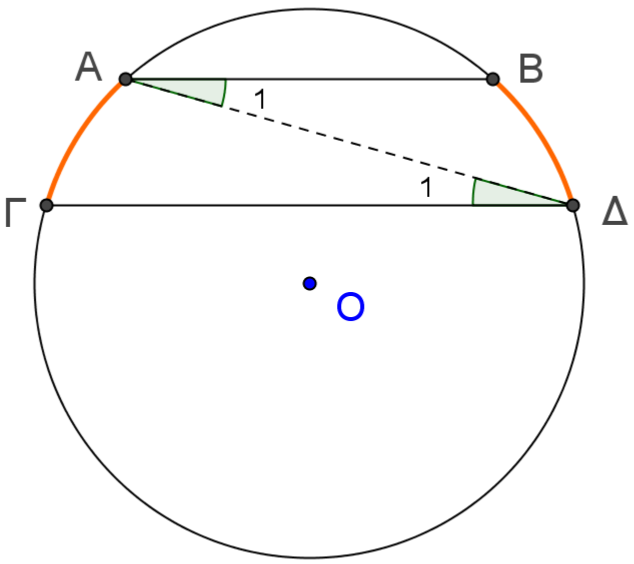
Σχόλιο (§ 6.2)

Τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών είναι ίσα και **αντίστροφα**

αν δύο τόξα που περιέχονται μεταξύ μή τεμνόμενων χορδών είναι ίσα, τότε οι χορδές είναι παράλληλες



Ευθύ:

Φέρουμε το τμήμα ΑΔ.

Τότε αφού ΑΒ//ΓΔ θα είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$ **(1)** ως εντός εναλλάξ.

Αφού οι γωνίες $\hat{A}_1$, $\hat{\Delta}_1$ είναι εγγεγραμμένες θα ισχύει: $\hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{B\Delta}}{2}$, $\hat{\Delta}_1 = \frac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2}$ *(Πόρισμα i)* επομένως από την **(1)** παίρνουμε:

$$\frac{\overset{\frown}{B\Delta}}{2} = \frac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{A\Gamma}$$

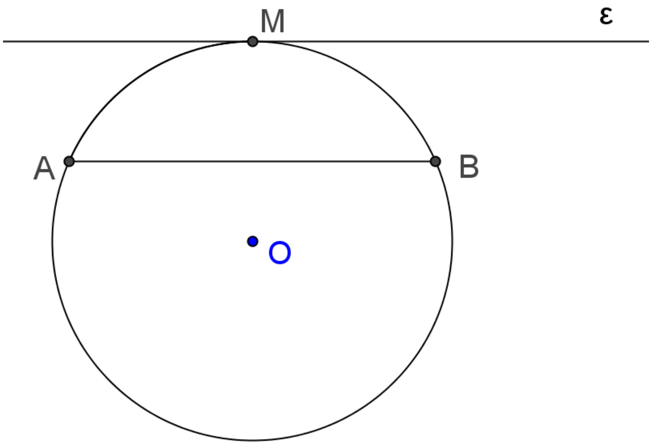
Αντίστροφο:

Αν $\overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{A\Gamma}$ τότε προφανώς $\frac{\overset{\frown}{B\Delta}}{2} = \frac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2}$ **(2)**

Αφού οι γωνίες $\hat{A}_1$, $\hat{\Delta}_1$ είναι εγγεγραμμένες θα ισχύει: $\hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{B\Delta}}{2}$, $\hat{\Delta}_1 = \frac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2}$ (Πόρισμα i) οπότε από την **(2)** έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Αφού οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ τεμνόμενες από την ΑΔ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, αυτές είναι παράλληλες ΑΒ//ΓΔ. *(Θεώρημα § 4.2)*

Α1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή ΑΒ κύκλου (Κ) είναι παράλληλη στη χορδή ΑΒ και αντίστροφα



Λύση:

Ευθύ:

Εστω Μ το μέσο του τόξου ΑΒ και ε η εφαπτόμενη του στο Μ.Θα δείξουμε ότι ε//ΑΒ.

Εχουμε:

η $\hat{M}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης, άρα: $\hat{A} = \hat{M}_1$ **(1)**

Εξ άλλου αφού Μ μέσο ΑΒ θα είναι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ οπότε $\hat{A} = \hat{B}$ **(2)** ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{MB}$ και $\overset{\frown}{MA}$ αντίστοιχα.Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{B} = \hat{M}_1$, απ' όπου έχουμε ε//ΑΒ.

Αντίστροφα: Υποθέτουμε τώρα ότι ε//ΑΒ και θα δείξουμε ότι Μ μέσο $\overset{\frown}{AB}$.

Εχουμε $\hat{A} = \hat{M}_1$ **(3)** *(γωνία χορδής και εφαπτομένης)* και $\hat{B} = \hat{M}_1$ **(4)** ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ε και ΑΒ.

Από **(3)** και **(4)** προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{B}$, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα αυτών $\overset{\frown}{MB}$, $\overset{\frown}{MA}$ είναι ίσα δηλαδή Μ μέσο του $\overset{\frown}{AB}$.

2η λύση

Η ΟΜ είναι κάθετη στην ε.Θα δείξουμε ότι είναι κάθετη και στην ΑΒ.

Πράγματι αφού $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ θα είναι και $A\hat{O}M = M\hat{O}B$, οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΟΒ αφού η ΟΜ είναι φορέας της διχοτόμου θα είναι και ο φορέας του ύψους

Α2. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το Β.

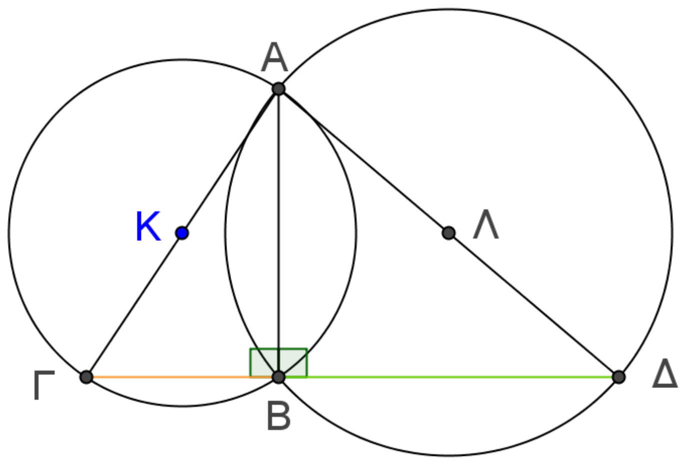
Λύση:

Επειδή στον κύκλο κέντρου Κ το Γ είναι αντιδιαμετρικό του Α, η γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} = 90^\circ$ (1).

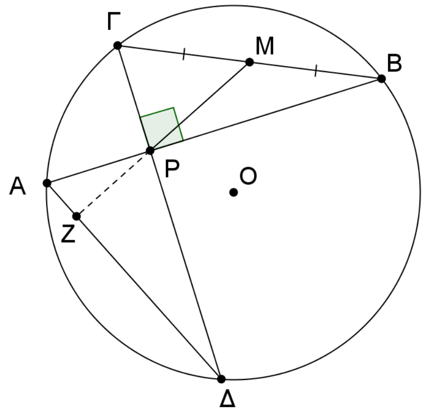
Επειδή στον κύκλο κέντρου Λ το Δ είναι αντιδιαμετρικό του Α, η γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Delta}$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή $\mathrm{A\hat{B}\Delta} = 90^\circ$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι:

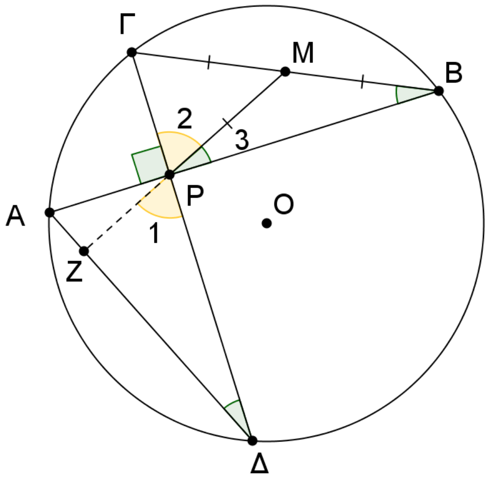
$\mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma} + \mathrm{A\hat{B}\Delta} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, το οποίο σημαίνει ότι Γ, Β, Δ συνευθειακά, δηλαδή η ΓΔ διέρχεται από το Β.



Α3. Δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Κ) τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΡΜ του τριγώνου ΡΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ.



Λύση:



Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{P}_1 + \hat{\Delta} = 90^\circ$.

Εχουμε:

$\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ **(1)** ως κατακορυφήν

$\hat{\Delta} = \hat{B}$ **(2)** ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

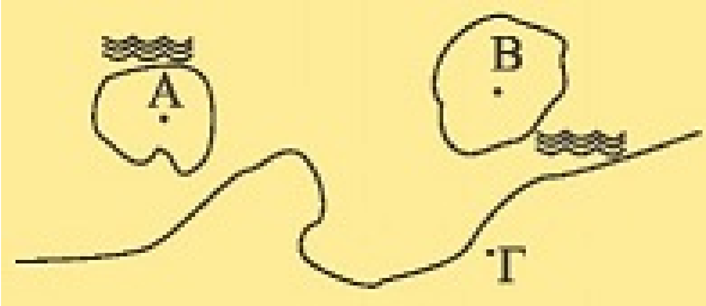
Επιπλέον $\Gamma\hat{P}B = 90^\circ$ *(αφού από τα δεδομένα οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται κάθετα)*, άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΓΒ η ΡΜ είναι διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή της ορθή γωνίας, οπότε (§ 5.9 Θεώρημα Ι) ισχύει ότι:

$$PM = \frac{B\Gamma}{2} = MB.$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΡΒ οι προσκείμενες γωνίες στην βάση είναι ίσες $\hat{B} = \hat{P}_3$ **(3).**

Αρα $\hat{P}_1 + \hat{\Delta} \overset{(1),(2)}{=} \hat{P}_2 + \hat{B} \overset{(3)}{=} \hat{P}_2 + \hat{P}_3 = \Gamma\hat{P}B = 90^\circ$.

A4. Ο καπετάνιος ενός ιστιοπλοϊκού πλοίου I είδε τρεις σημαδούρες για υφάλους στα σημεία A, B, Γ.



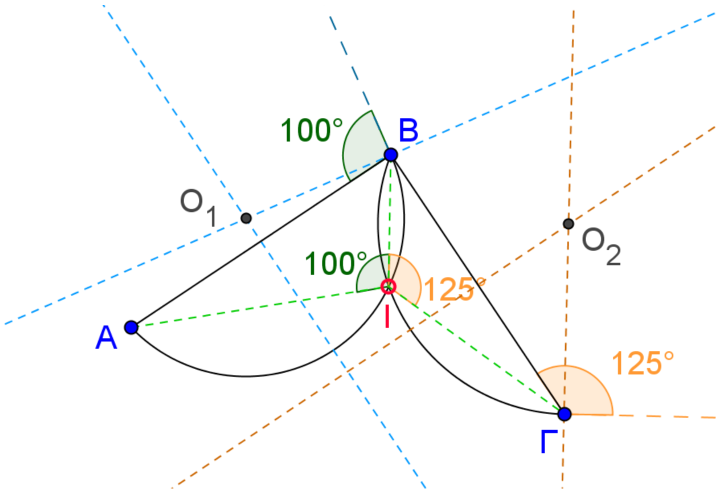
Με μία πυξίδα διόπτευσης μέτρησε ότι

AIB = 100°, BIΓ = 125°, ΓIA = 135°.

Εντόπισε τα σημεία A, B, Γ στο χάρτη και προσδιόρισε την ακριβή θέση του ιστιοπλοϊκού.

Πώς τα κατάφερε;

Λύση:



- Επειδή $A\hat{I}B = 100^\circ$, το I βρίσκεται σε τόξο **τ_1** που γράφεται με χορδή AB και <u>δέχεται</u> γωνία 100°.

- Ομοια, επειδή $B\hat{I}\Gamma = 125^\circ$ το I βρίσκεται και στο τόξο **τ_2** που γράφεται με χορδή τη BΓ και δέχεται γωνία 125°.

Τα τόξα αυτά έχουν κοινό το σημείο B που δεν βρίσκεται πάνω στην διάκεντρο O_1O_2 των αντίστοιχων κύκλων, επομένως θα έχουν και δεύτερο κοινό σημείο I το οποίο είναι το ζητούμενο.

Πράγματι $A\hat{I}B = 100^\circ$, από κατασκευή του **τ_1** και $B\hat{I}\Gamma = 125^\circ$ από κατασκευή του **τ_2**.

<u>Σχόλιο</u>: *Προφανώς ο καπετάνιος έκανε και μια περιττή μέτρηση (το δεδομένο $\Gamma\hat{I}A = 135^\circ$ είναι περιττό αφού το I προσδιορίζεται ως τομή δύο τόξων).*

<u>Σημείωση:</u> *Στο σχήμα άφησα και τις γραμμές που με βοήθησαν στην κατασκευή όπως περιγράφεται στο πρόβλημα της §6.4.*

Αναλυτικά:

Στο αντικείμενο επίπεδο του (AB,Γ) και με κορυφή το B (θα μπορούσα και A) και πλευρά AB έφερα γωνία 100°.Εφερα την κάθετο στο B.Επίσης έφερα την μεσοκάθετο του AB.Το σημείο τομής τους O_1 είναι το κέντρο του κύκλου στον οποίο βρίσκεται το ζητούμενο τόξο $\overset{\frown}{AB}$

Στο αντικείμενο επίπεδο του (BΓ,A) και με κορυφή το Γ (θα μπορούσα και B) και πλευρά BΓ έφερα γωνία 125°.Εφερα την κάθετο στο Γ.Επίσης έφερα την μεσοκάθετο του BΓ.Το σημείο τομής τους O_2 είναι το κέντρο του κύκλου στον οποίο βρίσκεται το ζητούμενο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

Το I είναι το σημείο τομής των δύο τόξων.