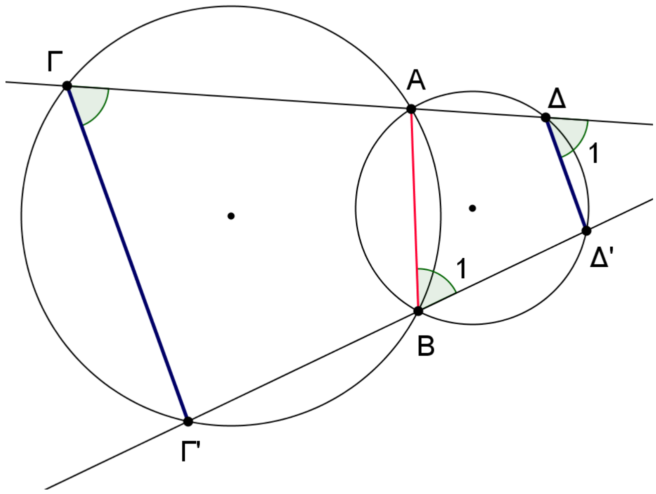
Α1. *Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ' και τον άλλο στα Δ και Δ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΓΓ'//ΔΔ'.*

ΛΥΣΗ:



Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_1$. *§ 4.2 Πόρισμα Ι*

Φέρνουμε την κοινή χορδή ΑΒ των δύο κύκλων.

- Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓ'Γ είναι εγγράψιμο έχουμε:

$\hat{\Gamma} = \hat{B}_1$ **(1)** ($\hat{B}_1$ εξωτερική γωνία του ΑΒΓ'Γ)

§ 6.5 ΠΟΡΙΣΜΑ

- Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΔ'Δ είναι εγγράψιμο έχουμε:

$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ **(2)** ($\hat{\Delta}_1$ εξωτερική γωνία του ΑΒΔ'Δ)

§ 6.5 ΠΟΡΙΣΜΑ

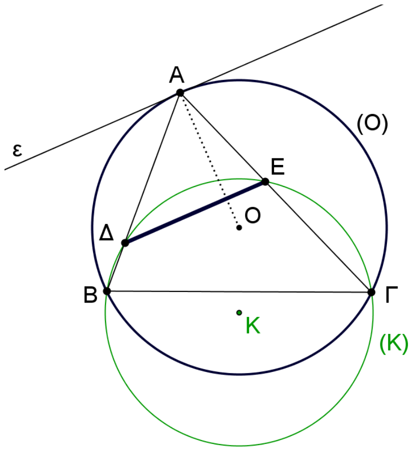
Από **(1)** και **(2)** προκύπτει το ζητούμενο.

Υπενθύμιση:

§ 4.2 Πόρισμα Ι (ύλη Α Λυκείου) Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες»

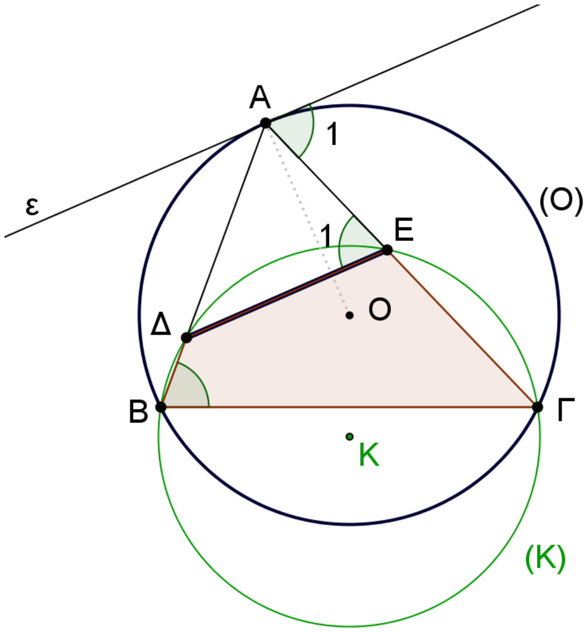
§ 6.5 ΠΟΡΙΣΜΑ Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του. (ή βέβαια αλλάζοντας λίγο την διατύπωση Κάθε εσωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εξωτερική γωνία του.)

Α2. *Ένας κύκλος (Κ) διέρχεται από τις κορυφές Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη **ε** του περιγεγραμμένου κύκλου στο Α.*



Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$.



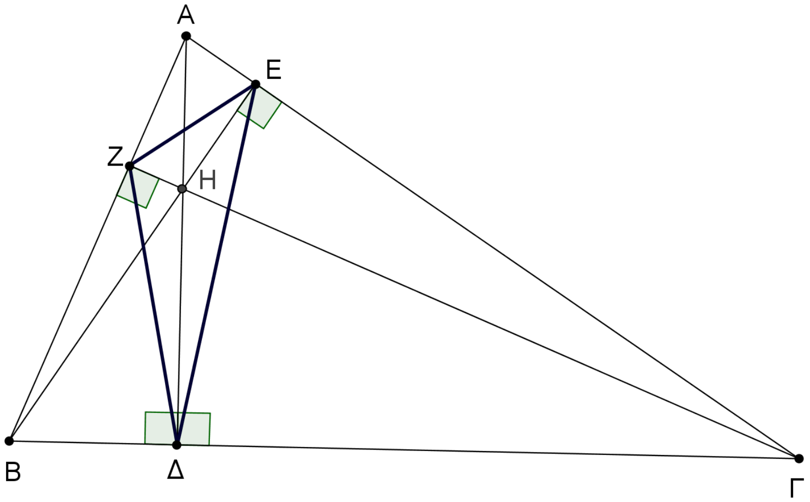
● Στον κύκλο (Ο) η γωνία $\hat{A}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{B}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.Αρα $\hat{A}_1 = \hat{B}$ **(1)** *(§ 6.3 Θεώρημα)*

● Το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ) άρα $\hat{E}_1 = \hat{B}$ **(2)** *(§ 6.5 ΠΟΡΙΣΜΑ)*

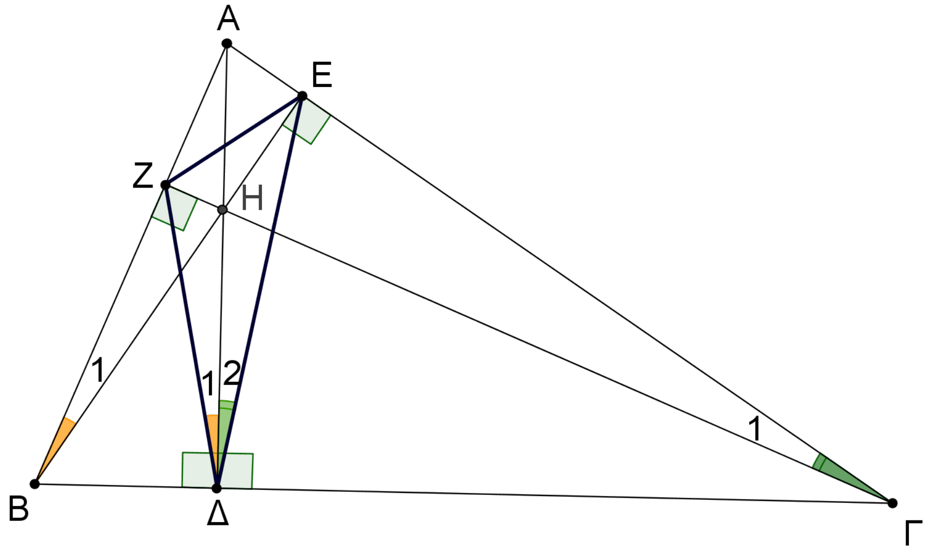
● Από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ δηλαδή οι ευθείες ΔΕ και ε τεμνόμενες από την ΑΕ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες οπότε ε//ΔΕ.
(§ 4.2 Θεώρημα)

Σχόλιο: *Φυσικά θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι* $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1$ *(δεν έχω βάλει τους δείκτες στο σχήμα αλλά πιστεύω ότι είναι σαφές ποιές γωνίες είναι.)*

Α3. *Να αποδείξετε ότι τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ενός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ.*



ΛΥΣΗ:



- Είναι $B\hat{\Delta}H + B\hat{Z}H = 90° + 90° = 180°$ οπότε το τετράπλευρο ΒΔΗΖ είναι εγγράψιμο σε κύκλο και επομένως $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ **(1)**
- Επίσης $\Gamma\hat{\Delta}H + \Gamma\hat{E}H = 90° + 90° = 180°$ οπότε το τετράπλευρο ΓΔΗΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο και επομένως $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1$ **(2)**

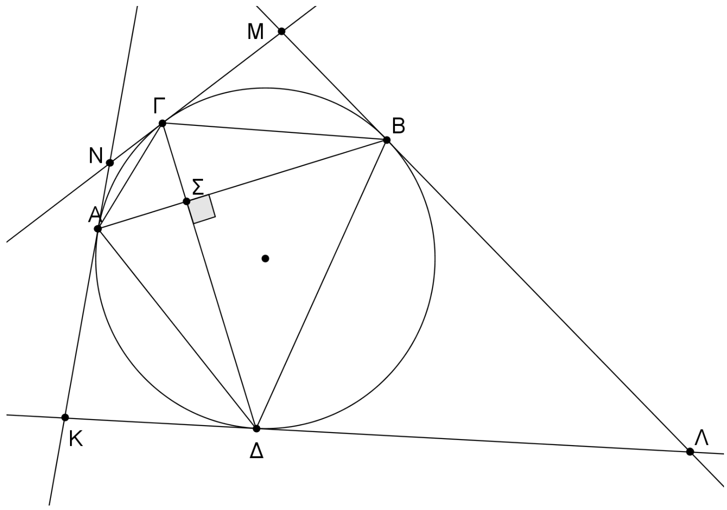
Απομένει να δείξουμε ότι $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$

- Το ΒΖΕΓ είναι και αυτό εγγράψιμο σε κύκλο, γιατί $B\hat{Z}\Gamma = B\hat{E}\Gamma = 90°$ *(δηλ. η πλευρά του ΒΓ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Ζ και Ε υπό ίσες γωνίες Θεώρημα σ.131 ii)* οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ **(3)**

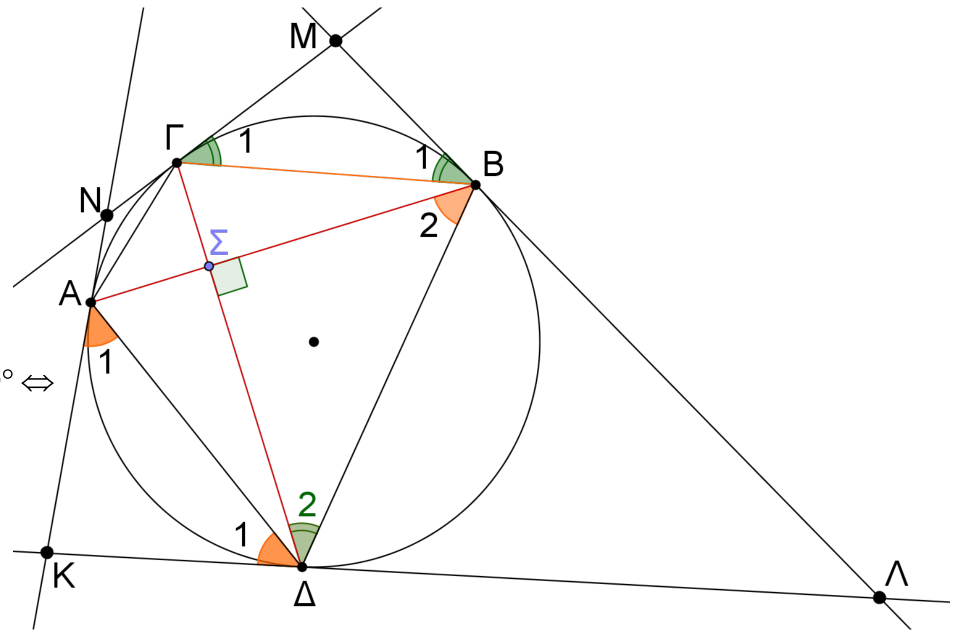
Από **(1)**, **(2)** και **(3)** προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{\Delta}E$ του τριγώνου ΔΕΖ.

Ομοια αποδεικνύεται και για τα άλλα ύψη.

Α4. *Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.*
Συγκεκριμένα στο δίπλα σχήμα έχουμε έναν κύκλο και δύο κάθετες χορδές του ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται στο Σ. Στα Α, Β, Γ, και Δ φέρνουμε εφαπτόμενες του κύκλου, τα σημεία τομής των οποίων σχηματίζουν το τετράπλευρο ΝΜΛΚ.Να αποδείξετε ότι το ΝΜΛΚ είναι εγγράψιμο.



Λύση:



- Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{K}+\hat{M}=180°$

Είναι ΚΑ=ΚΔ, ως εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Κ προς τον κύκλο και επομένως $\hat{A}_1=\hat{\Delta}_1$, οπότε από το τρίγωνο ΚΑΔ έχουμε:

$$\hat{K}+\hat{\Delta}_1+\hat{A}_1=180° \Leftrightarrow \hat{K}+\hat{A}_1+\hat{A}_1=180° \Leftrightarrow$$

$$\hat{K}+2\hat{A}_1=180° \Leftrightarrow \hat{K}=180°-2\hat{A}_1$$

Ομως $\hat{A}_1=\hat{B}_2$ αφού η πρώτη είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η δεύτερη εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής (εδώ το $\overset{\frown}{A\Delta}$) *(Θεώρημα σ. 124)*

$\hat{K}=180°-2\hat{B}_2$ **(1)**

- Παρόμοια είναι ΜΓ=ΜΒ, ως εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Μ προς τον κύκλο και επομένως $\hat{\Gamma}_1=\hat{B}_1$ οπότε από το τρίγωνο ΜΒΓ έχουμε

$$\hat{M}+\hat{\Gamma}_1+\hat{B}_1=180° \Leftrightarrow \hat{M}+\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_1=180° \Leftrightarrow \hat{M}+2\hat{\Gamma}_1=180° \Leftrightarrow \hat{M}=180°-2\hat{\Gamma}_1$$

Ομως $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Delta}_2$ αφού η πρώτη είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η δεύτερη εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής (εδώ το $\overset{\frown}{\Gamma B}$) *(Θεώρημα σ. 124)*

$\hat{M}=180°-2\hat{\Delta}_2$ **(2)**

Επειδή όμως $AB \perp \Gamma\Delta$ το τρίγωνο ΣΒΔ είναι ορθογώνιο οπότε οι οξείες γωνίες θα έχουν άθροισμα $\hat{B}_2+\hat{\Delta}_2=90°$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** βρίσκουμε:

$\hat{K} + \hat{M} = 180° - 2\hat{B}_2 + 180° - 2\hat{\Delta}_2 = 360° - 2\left(\hat{B}_2 + \hat{\Delta}_2\right) = 360° - 2 \cdot 90° = 360° - 180° = 180°$ που σημαίνει ότι το ΚΛΜΝ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.