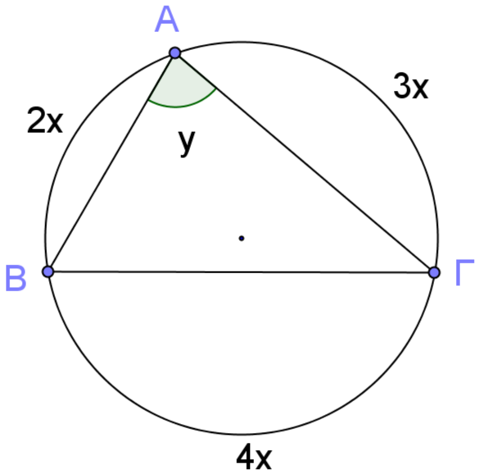
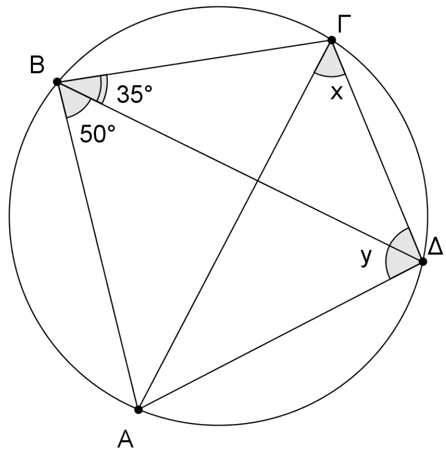
6.1-6.4 Ασκήσεις Εμπέδωσης (Version 7-9-2015)

Ε1. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y.





Λύση:

● Για το 1° σχήμα έχουμε $2x+3x+4x=360° \Leftrightarrow 9x=360° \Leftrightarrow x=40°$

Η y είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}=4x$ οπότε:

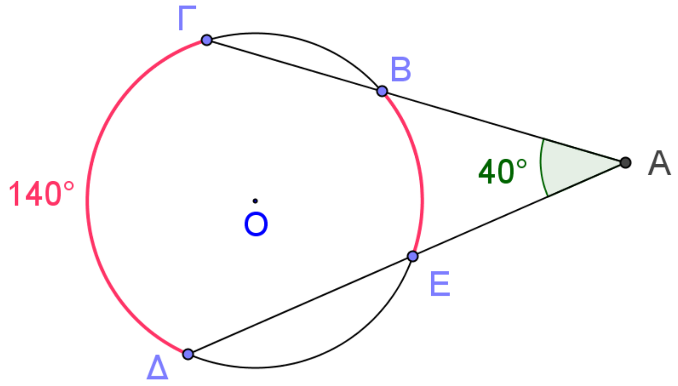
$$y=\frac{\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}}{2}=\frac{4x}{2}=2x=2\cdot 40°=80°.$$

● Για το 2° σχήμα $x=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta=50°$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Για τον ίδιο λόγο $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma=35°$ οπότε από το τρίγωνο ΑΔΓ βρίσκουμε:

$$y=180°-50°-35°=95°$$

Ε2. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι* $\hat{A}$ *= 40°, να βρείτε το μέτρο του τόξου* $\overset{\frown}{BE}$.



Λύση:

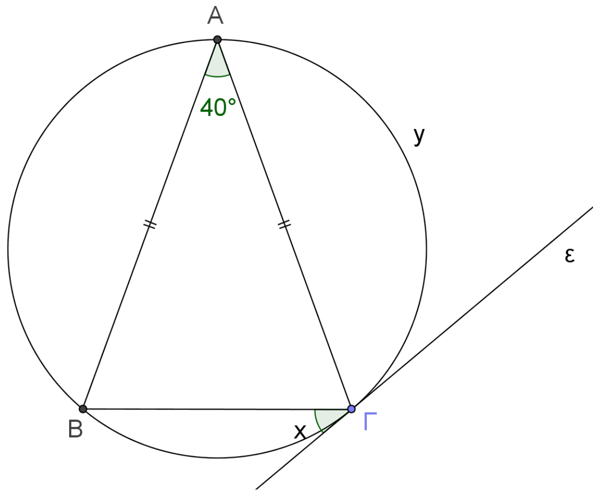
Η γωνία $\hat{A}$ είναι γωνία τεμνουσών οπότε § 6.3 έχουμε:

$$\hat{A}=\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{\Gamma\Delta}-\overset{\frown}{BE}\right)\Leftrightarrow 40°=\frac{1}{2}\left(140°-\overset{\frown}{BE}\right)\Leftrightarrow 80°=140°-\overset{\frown}{BE}\Leftrightarrow \overset{\frown}{BE}=140°-80°$$

$$\Leftrightarrow \overset{\frown}{BE}=140°-80°\Leftrightarrow \overset{\frown}{BE}=60°$$

Ε3. *Αν στα παρακάτω σχήματα οι ευθείες ε και ε' είναι εφαπτόμενες να βρεθούν τα x και y.*

Λύση:



- $x = \hat{A} = 40°$ γιατί η x είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης.

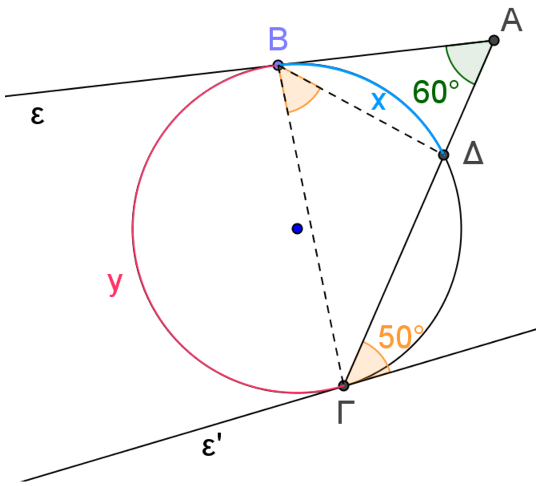
Τότε $\overset{\frown}{Β\Gamma} = 80°$.Επειδή ΑΒ=ΑΓ θα είναι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{Β\Gamma} = y$, οπότε από την

$2y + \overset{\frown}{Β\Gamma} = 360° \Leftrightarrow 2y + 80° = 360° \Leftrightarrow 2y = 360° - 80° \Leftrightarrow$

$2y = 280° \Leftrightarrow y = 140°$.

- Η $\hat{A}$ είναι γωνία τέμνουσας και εφαπτομένης, επομένως σύμφωνα με την § 6.3 θα είναι:

- $\hat{A} = \frac{1}{2}(y - x) \Leftrightarrow y - x = 120°$ **(1)**
- Είναι $x + y + \left(\overset{\frown}{\Gamma\Delta}\right) = 360°$ (*)



Για να υπολογίσουμε το $\left(\overset{\frown}{\Gamma\Delta}\right)$ σκεφτόμαστε ως εξής:

$\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{B}\Delta = \frac{\left(\overset{\frown}{\Gamma\Delta}\right)}{2} \Leftrightarrow \left(\overset{\frown}{\Gamma\Delta}\right) = 2\hat{\Gamma} = 2 \cdot 50° = 100$

Αντικαθιστώντας στην (*) παίρνουμε:

$x + y + 100° = 360° \Leftrightarrow x + y = 260°$ **(2)**

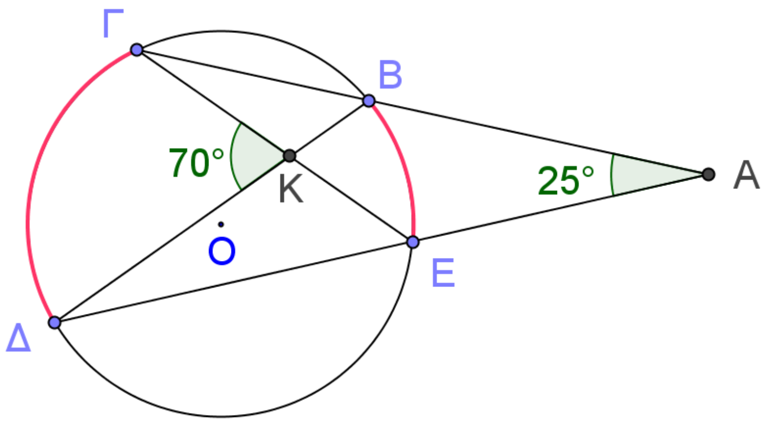
Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

$2y = 380° \Leftrightarrow y = \frac{380°}{2} \Leftrightarrow y = 190°$

οπότε με αντικατάσταση στην **(2)** βρίσκουμε:

$x + 190° = 260° \Leftrightarrow x = 260° - 190° \Leftrightarrow x = 70°$

Ε4. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι Α = 25°, και Κ=70° να βρείτε τα μέτρα των τόξων ΕΒ και ΓΔ.*



Από το σχήμα έχουμε:

$$\hat{K} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{BE}\right) \Leftrightarrow 70° = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{BE}\right) \Leftrightarrow 140° = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{BE} \Leftrightarrow \overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{BE} = 140° \quad (1)$$

Επίσης: $\hat{A} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{\Gamma\Delta} - \overset{\frown}{BE}\right) \Leftrightarrow \overset{\frown}{\Gamma\Delta} - \overset{\frown}{BE} = 2 \cdot \hat{A} \Leftrightarrow \overset{\frown}{\Gamma\Delta} - \overset{\frown}{BE} = 2 \cdot 25° \Leftrightarrow \overset{\frown}{\Gamma\Delta} - \overset{\frown}{BE} = 50°$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

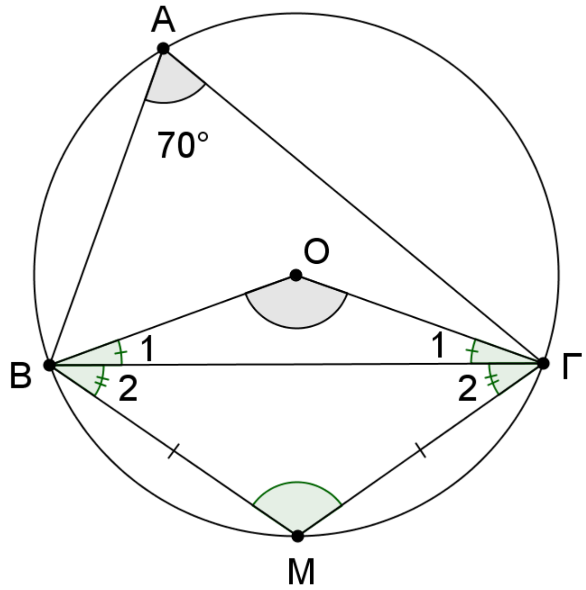
$$2\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 190° \Leftrightarrow \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \frac{190°}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 95°$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{BE} = 140° \Leftrightarrow \overset{\frown}{BE} = 140° - \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BE} = 140° - 95° \Leftrightarrow \overset{\frown}{BE} = 45°$$

Ε5. *Αν στο διπλανό σχήμα είναι ΜΒ = ΜΓ και $\hat{\mathrm{A}}$ = 70°, να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΟΒΓ και ΜΒΓ.*

Λύση:



Εχουμε:

$\hat{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\hat{\mathrm{O}}$ ή $70° = \frac{1}{2}\hat{\mathrm{O}}$ ή $\hat{\mathrm{O}} = 140°$.

Επειδή ΟΒ=ΟΓ είναι $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_1 = x$ οπότε στο *(ισοσκελές)* τρίγωνο ΟΒΓ έχουμε:

$2x + \hat{\mathrm{O}} = 180°$ ή

$2x + 140° = 180° \Leftrightarrow 2x = 40° \Leftrightarrow x = 20°$

δηλαδή $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 20°$

Επειδή $\hat{\mathrm{O}} = 140°$ θα είναι και $\overset{\frown}{\mathrm{B M \Gamma}} = 140°$ και αφού Μ μέσο του, θα είναι

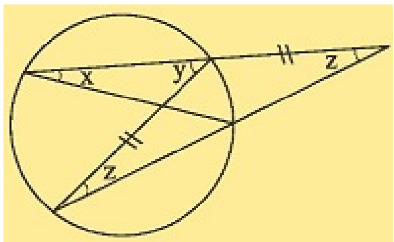
$\overset{\frown}{\mathrm{BM}} = \overset{\frown}{\mathrm{M\Gamma}} = 70°$ οπότε $\hat{\mathrm{B}}_2 = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{M\Gamma}}}{2} = \frac{1}{2}70° = 35°$

και $\hat{\Gamma}_2 = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{MB}}}{2} = \frac{1}{2}70° = 35°$.

Πλέον από το τρίγωνο ΒΜΓ βρίσκουμε ότι:

$\hat{\mathrm{M}} = 180° - 2 \cdot 35° = 110°$

Ε6. Στο παρακάτω σχήμα, ποια σχέση είναι σωστή;



i) x - y - z = 0,

ii) x - 2y + z = 0,

iii) x - y + z = 0,

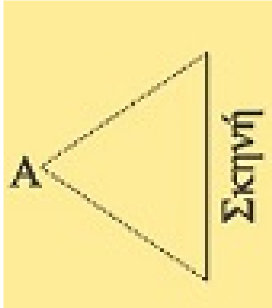
v) καμία από τις παραπάνω.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Λύση:

Από το σχήμα έχουμε y=2z (y εξωτερική γωνία τριγώνου) και x=z ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.Με την βοήθεια αυτών η iii) είναι σωστή.

E7. Το καλύτερο κάθισμα σε έναν κινηματογράφο είναιτο κάθισμα "Α". Να βρείτε ποια άλλα καθίσματα έχουν την ίδια οπτική γωνία με το θεατή που κάθεται στο κάθισμα Α.



Λύση:

Τα ζητούμενα καθίσματα είναι αυτά που βρίσκονται πάνω στο τόξο *(πράσινο τόξο)* που γράφεται με χορδή το τμήμα που εκφράζει το πλάτος της σκηνής και δέχεται γωνία ίση με τη γωνία υπο την οποία φαίνεται η σκηνή από το κάθισμα Α. *(δες § 6.4)*