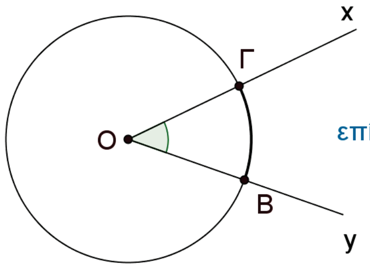
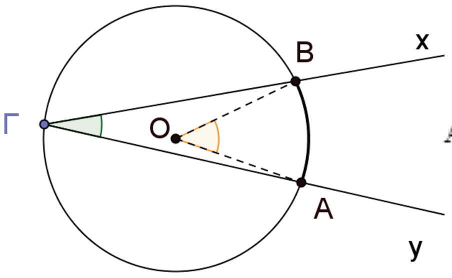
6.1 Εγγεγραμμένη γωνία *(version 2-4-2016)*

Επίκεντρη : η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου

Εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου: η κορυφή είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουσες του κύκλου.



επίκεντρη $\mathrm{B\hat{O}\Gamma} = \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$



εγγεγραμμένη

$\mathrm{A\hat{O}B} = 2\mathrm{A\hat{\Gamma}B} \Leftrightarrow$

$\mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \dfrac{\mathrm{A\hat{O}B}}{2} = \dfrac{\left(\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}\right)}{2}$

Το τόξο ΒΓ που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της ή διαφορετικά λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία Α **βαίνει στο τόξο ΒΓ**.

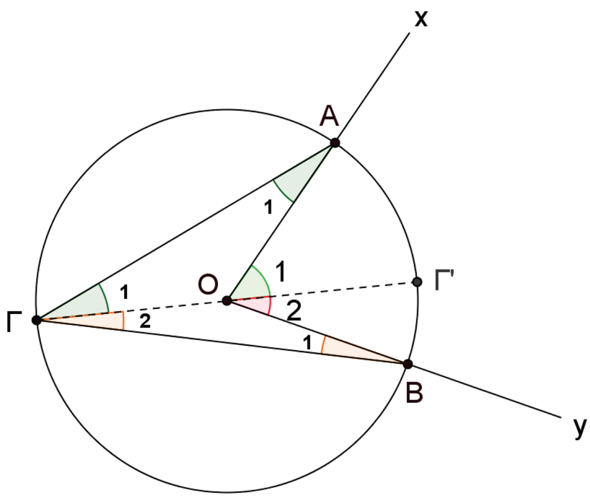
Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο

(*ή ισοδύναμα η επίκεντρη είναι ίση με το διπλάσιο της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.)*

Απόδειξη:

Έστω κύκλος (Ο,R) και ένα τόξο του ΑΒ. Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ΑÔΒ και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο Τότε θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{A\hat{O}B} = 2\mathrm{A\hat{\Gamma}B}$.



(i) Ας μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο Ο του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας ΑΓΒ (σχ.4α). Έστω Γ' το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ.

Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές, επομένως $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_1$. Η $\hat{O}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΟΓ, επομένως

$\hat{O}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 2\hat{\Gamma}_1$ (1)

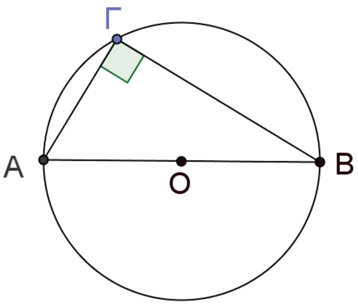
Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές, επομένως $\hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_1$. Η $\hat{O}_2$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΟΓ, επομένως $\hat{O}_2 = \hat{\Gamma}_2 + \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_2 = 2\hat{\Gamma}_2$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2\hat{\Gamma}_1 + 2\hat{\Gamma}_2 = 2\left(\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2\right) \Leftrightarrow \mathrm{A\hat{O}B} = 2\mathrm{A\hat{\Gamma}B} \Leftrightarrow \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \frac{\mathrm{A\hat{O}B}}{2} = \frac{\left(\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}\right)}{2}$$

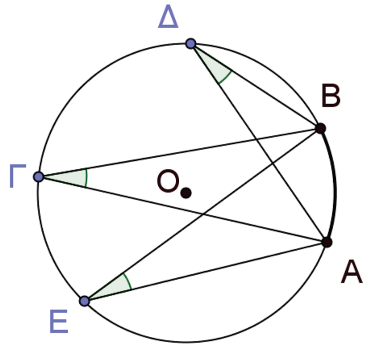
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

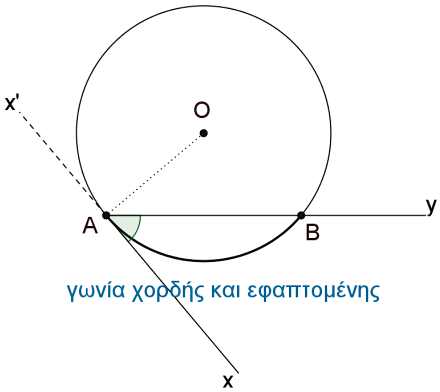
(i) Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.



(ii) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

(iii) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.





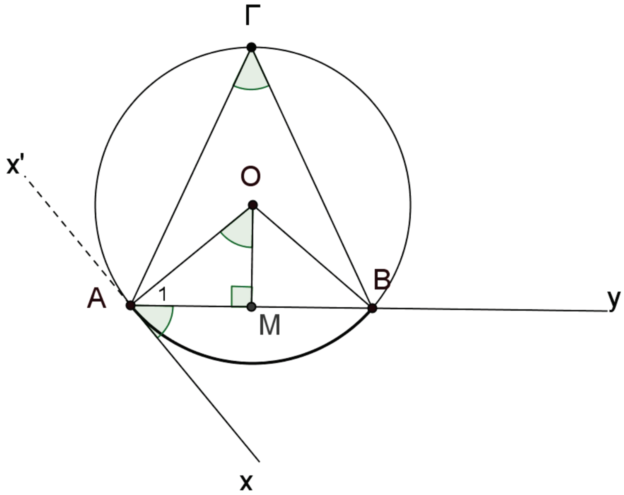
►Αν η κορυφή μιας γωνία είναι σημείο του κύκλου, η μία της πλευρά είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται **γωνία χορδής και εφαπτομένης**.

Θεώρημα

Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

Απόδειξη:

Έστω ότι η γωνία χορδής και εφαπτομένης xAy είναι οξεία και ΑΓΒ μια τυχαία εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής ΑΒ.



Γνωρίζουμε $A\hat{\Gamma}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$.

Φέρουμε το απόστημα ΟΜ, οπότε επειδή στο ΟΑ=ΟΒ στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ το ύψος είναι και διχοτόμος οπότε

$$A\hat{O}M = M\hat{O}B = \frac{A\hat{O}B}{2} = A\hat{\Gamma}B.$$

Αλλά $x\hat{A}y$ = $A\hat{O}M$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές *(§ 4.7 Θεώρημα)*. (**ή** μπορούμε να πούμε αφού $OA \perp x'x : x\hat{A}y = 90° - \hat{A}_1 = A\hat{O}M$)

Επομένως $x\hat{A}y = A\hat{\Gamma}B$.

• *Αν η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι αμβλεία, η απόδειξη είναι ανάλογη.*