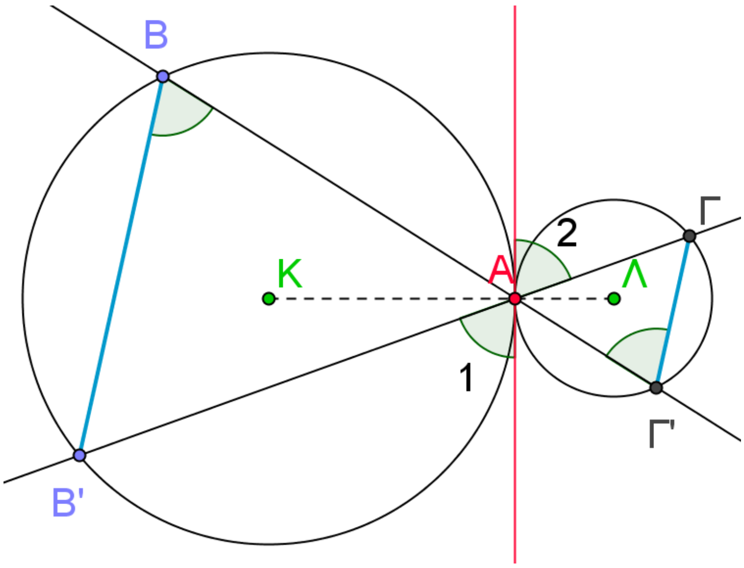
ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ § 6.1-6.4

Σ1. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά) στο σημείο Α και δύο ευθείες ε, ε' που διέρχονται από το Α τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Β, Β' και τον άλλο στα Γ και Γ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΒ'//ΓΓ'.

Λύση:

Εστω ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α.Φέρνουμε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη η αυτών στο Α.Τότε

- $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{A}}_1$ *(Η $\hat{\mathrm{A}}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{\mathrm{B}}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής στον κύκλο κέντρου Κ).*



- $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{A}}_2$ *(Η $\hat{\mathrm{A}}_2$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{\Gamma}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής στον κύκλο κέντρου Λ).*
- $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2$ ως κατακορυφήν.

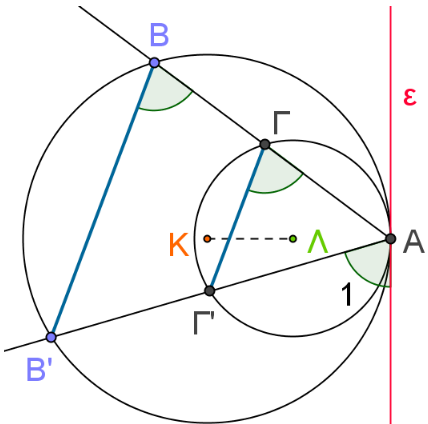
Αρα $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ δηλαδή οι ευθείες ΒΒ' και ΓΓ' τεμνόμενες από την ΒΓ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες οπότε (*§4.2 Θεώρημα*) *είναι παράλληλες* ΒΒ'//ΓΓ'.

Υπενθύμιση: Αν θέλουμε μπορούμε να μελετήσουμε την *§3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων*

Εφάπτονται εξωτερικά δ=R+ρ

Εφαπτονται εσωτερικά δ=R-ρ

__Β' σχήμα__ (οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά)

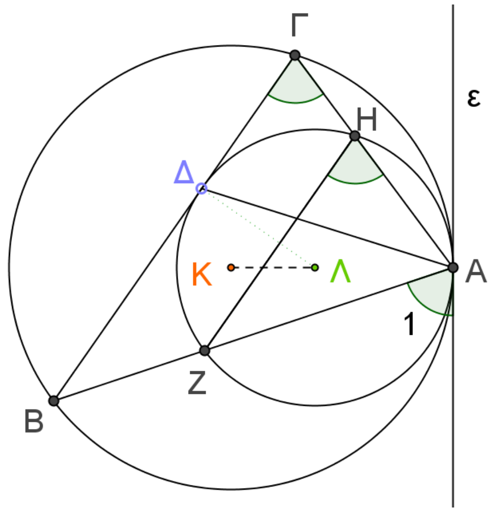


- $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{A}}_1$ *(Η $\hat{\mathrm{A}}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{\mathrm{B}}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής στον κύκλο κέντρου Κ).*
- $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{A}}_1$ *(Η $\hat{\mathrm{A}}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{\Gamma}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής στον κύκλο κέντρου Λ).*

Αρα $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ δηλαδή οι ευθείες ΒΒ' και ΓΓ'
τεμνόμενες από την ΒΓ σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες οπότε (*§4.2 Θεώρημα*) *είναι παράλληλες* ΒΒ'//ΓΓ'.

Σ2. *Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Μία χορδή ΒΓ του μεγαλύτερου κύκλου εφάπτεται στο μικρότερο, στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία* $B\hat{A}\Gamma$.

Λύση:



Εστω Ζ, Η τα δεύτερα κοινά σημεία των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με τον μικρότερο κύκλο.Για να δείξουμε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ αρκεί να δείξουμε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{A}H$ και επειδή αυτή είναι εγγεγραμμένη στον μικρό κύκλο, αρκεί να δείξουμε ότι $\overset{\frown}{Z\Delta} = \overset{\frown}{\Delta H}$ το οποίο σύμφωνα με την άσκηση Αποδεικτικές 1 είναι ισοδύναμο με την ΒΓ//ΖΗ το οποίο με την σειρά του είναι ισοδύναμο με την $\hat{\Gamma} = \hat{H}$ που ισχύει γιατί :

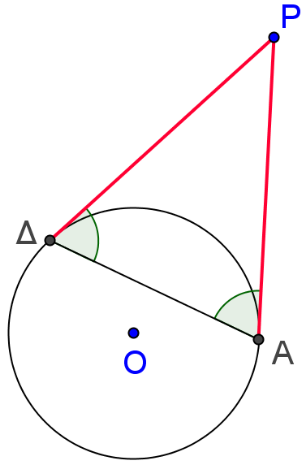
Αν φέρουμε την κοινή εξωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων στο Α, έστω ε, τότε ισχύουν:

$\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$ (Η $\hat{A}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{\Gamma}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής στον κύκλο κέντρου Κ) και

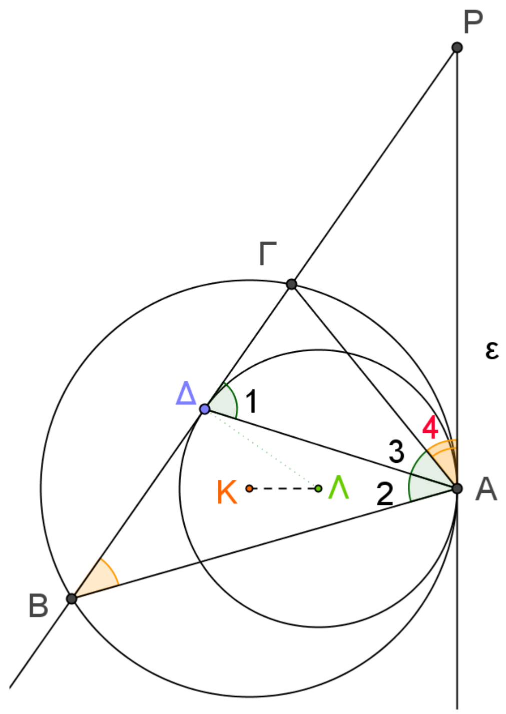
$\hat{H} = \hat{A}_1$ (Η $\hat{A}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{H}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής στον κύκλο κέντρου Λ)

$2^{Η}$ λύση

● Γνωρίζουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα *(§ 3.15)* επομένως σχηματίζουν μαζί με το τμήμα που ενώνει τα σημεία επαφής ισοσκελές τρίγωνο που οι προσκείμενες γωνίες στην βάση είναι ίσες.



►Φέρνουμε την κοινή εξωτερική εφαπτόμενη των δύο κύκλων στο Α (την ονομάζουμε **ε**) και έστω Ρ το σημείο τομής της ε με την εφαπτομένη του μικρού κύκλο στο Δ.



Επειδή ΡΔ=ΡΑ είναι

$\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = \hat{A}_3 + \hat{B}$ **(1)** (είναι $\hat{B} = \hat{A}_4$ ως εγγεγραμμένη και γωνία χορδής και εφαπτομένης αντίστοιχα στον μεγάλο κύκλο)

Στο τρίγωνο ΔΒΑ η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι γωνιών

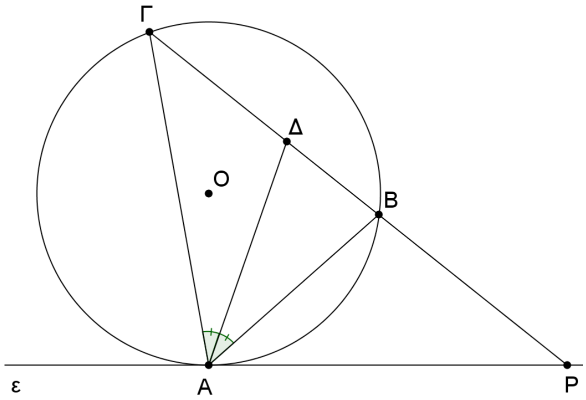
$\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2 + \hat{B}$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι:

$\hat{A}_2 \cancel{+\hat{B}} = \hat{A}_3 \cancel{+\hat{B}} \Leftrightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}_3$.

Αθανασίου Δημήτρης (Μαθηματικός) asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

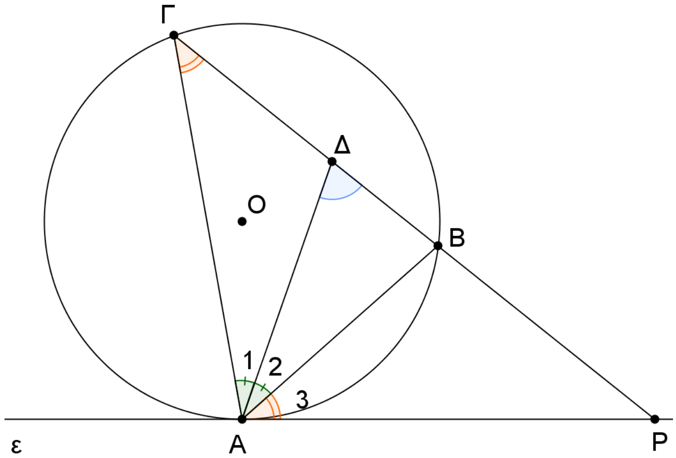
Σ3. Δίνεται κύκλος (Κ), η εφαπτομένη ε σε ένα σημείο του Α και ένα σημείο Ρ της ε. Από το Ρ φέρουμε μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ τέμνει τη χορδή ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι ΡΔ = ΡΑ.



Λύση:

Για να δείξουμε ότι ΡΑ=ΡΔ αρκεί να δείξουμε ότι η γωνία $\text{Ρ}\hat{\Delta}\text{Α}$ ισούται με την γωνία $\text{Ρ}\hat{\text{Α}}\Delta$.Εχουμε : η γωνία $\text{Ρ}\hat{\Delta}\text{Α}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ οπότε:

$\text{Ρ}\hat{\Delta}\text{Α} = \hat{\Gamma} + \hat{\text{Α}}_1$ **(1)**



Ομως $\hat{\Gamma} = \hat{\text{Α}}_3$ (Η $\hat{\text{Α}}_3$είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{\Gamma}$ η εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής §6.3) και $\hat{\text{Α}}_1 = \hat{\text{Α}}_2$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma$.Με αντικατάσταση των $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\text{Α}}_1$ με τα ίσα τους στην **(1)** παίρνουμε:

$\text{Ρ}\hat{\Delta}\text{Α} = \hat{\text{Α}}_3 + \hat{\text{Α}}_2 = \text{Ρ}\hat{\text{Α}}\Delta$ δηλαδή $\text{Ρ}\hat{\Delta}\text{Α} = \text{Ρ}\hat{\text{Α}}\Delta$ που είναι το ζητούμενο.