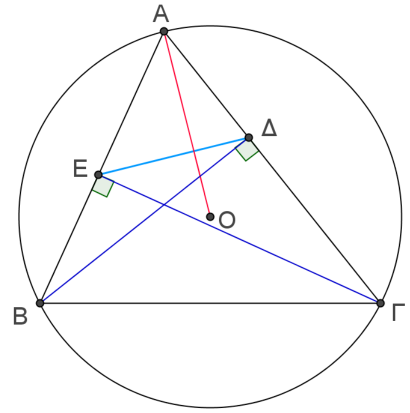
Σ1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (O,R). Αν ΒΔ και ΓΕ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι $OA \perp ΔΕ$. (Θεώρημα Nagel).*



Λύση:

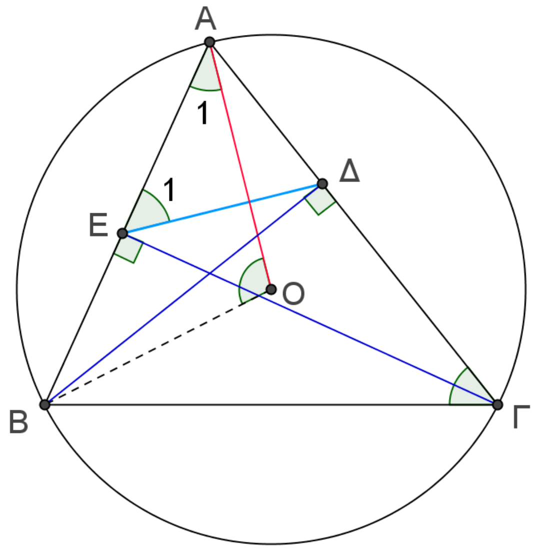
Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{A}_1 + \hat{E}_1 = 90°$.

- Γι αυτό φέρνουμε την ΟΒ, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΟΒ βρίσκουμε $2\hat{A}_1 + \hat{O} = 180°$ και επειδή $\hat{O} = 2\hat{\Gamma}$ *(αφού* $\hat{\Gamma}$ *εγγεγραμμένη και* $\hat{O}$ *επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο)* , παίρνουμε:

$2\hat{A}_1 + 2\hat{\Gamma} = 180° \Leftrightarrow \hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = 90°$ **(1)**.

- Επειδή όμως $B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma = 90°$, το τετράπλευρο ΒΕΔΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, στο οποίο η $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική γωνία, οπότε $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}$ **(2)**.

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{E}_1 = 90°$.

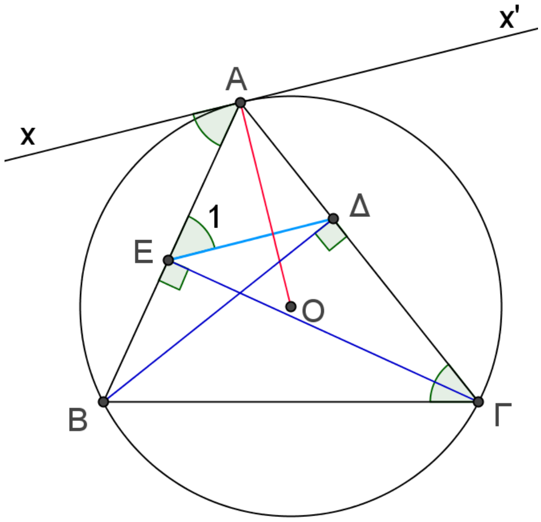


2ος τρόπος

Φέρνουμε την εφαπτομένη $x'x$ στο Α, οπότε $OA \perp x'x$.Αρκεί να αποδείξουμε ότι $ΔΕ // x'x$.

- Πράγματι $x\hat{A}B = \hat{\Gamma}$ **(1)** *(η* $x\hat{A}B$ *είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η* $\hat{\Gamma}$ *εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής)*
- Επειδή όμως $B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma = 90°$, το τετράπλευρο ΒΕΔΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, στο οποίο η $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική γωνία, οπότε $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}$ **(2)**.

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $x\hat{A}B = \hat{E}_1$.



Christian Heinrich von Nagel

From Wikipedia, the free encyclopedia

Christian Heinrich von Nagel (28 February 1803 in Stuttgart, Germany – 27 October 1882 in Ulm, Germany) was a German geometer.

After attending the gymnasium, Nagel went in 1817 to Evangelical Seminaries of Maulbronn and Blaubeuren.

From 1821 to 1825, he took a four-year course of theology at the Tübinger Stift.

Soon after his graduation, he became interested in mathematics. He became mathematics and science teacher at the Lyceum and at the Secondary school in Tübingen. Already in 1826, he earned doctorate at the local Faculty of Philosophy on a theme De triangulis rectangulis ex algebraica aequatione construendis (About right triangles construable from an algebraic equation).

Until 1830, he held post of a private lecturer in Tübingen. In that year, he moved to Ulm where he had a better-paid job as a teacher at the Gymnasium in Ulm. Later he was rector of the affiliated Realschule.

He was ennobled in 1875.

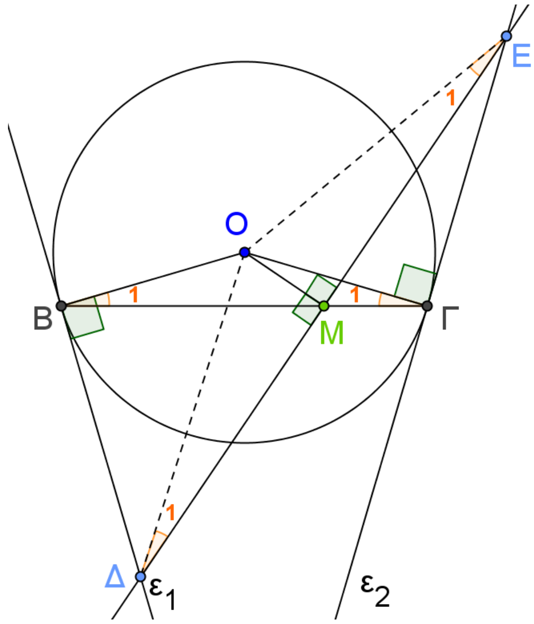
His best known results are from triangle geometry. One of the notable triangle points, Nagel point, is named after him.

Works

- *De triangulis rectangulis ex algebraica aequatione construendis (About right triangles construable from an algebraic equation), 1826*
- *Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreiecke gehöhrigen Kreise. Eine Abhandlung aus dem Gebiete der reinen Geometrie (Studies on the most important circles of the triangles. A treatise from the field of pure geometry), Leipzig, 1836*

2. *Δίνεται μία χορδή ΒΓ ενός κύκλου (O,R) και οι εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 στα άκρα της. Από ένα τυχαίο σημείο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΟΜ, που τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΜ = ΜΕ.*

Λύση:



Φέρνουμε τα τμήματα ΟΔ και ΟΕ.

Στο τρίγωνο ΟΔΕ το ΟΜ είναι ύψος από κατασκευή, οπότε για να είναι ΔΜ=ΜΕ πρέπει το τρίγωνο ΟΔΕ να είναι ισοσκελές δηλαδή πρέπει $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$.

- Επειδή ε_1 εφαπτομένη και ΟΒ ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής έχουμε: $O\hat{B}\Delta = 90°$.

Επίσης και $O\hat{M}\Delta = 90°$, οπότε το τετράπλευρο ΟΒΔΜ είναι εγγράψιμο και επομένως $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$. **(1)**

- Επειδή ε_2 εφαπτομένη και ΟΓ ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής έχουμε: $O\hat{\Gamma}E = 90°$ **(2).**

- Επίσης και $O\hat{M}E = 90°$, οπότε το τετράπλευρο ΟΒΔΜ είναι εγγράψιμο και επομένως $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

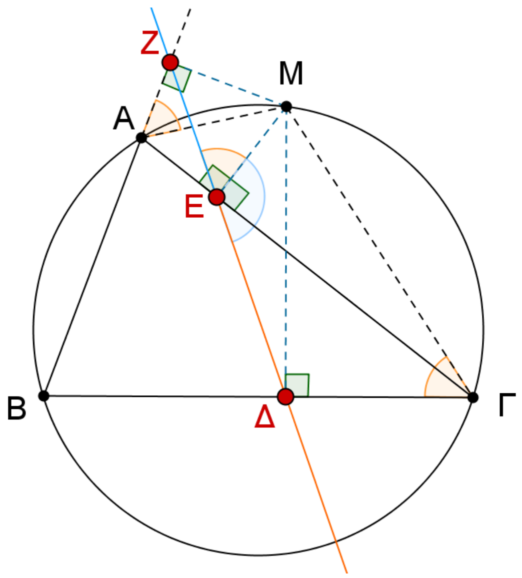
Αλλά το ότι ΟΒ=ΟΓ (ως ακτίνες του κύκλου) συνεπάγεται ότι το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ **(3).**

Από **(1)** και **(2)** με την βοήθεια της **(3)** βρίσκουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ που είναι το ζητούμενο.

<u>Σημείωση:</u> Είναι ένα απλό αλλά βασικό σχήμα το ότι δύο ακτίνες ενός κύκλου (που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία) σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.Σε αυτή την άσκηση έξυπνα «μεταφέρει» τις γωνίες αυτές σε ένα άλλο τρίγωνο που προφανώς θα είναι και αυτό ισοσκελές.

Σ3. *Να αποδείξετε ότι οι προβολές κάθε σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου πάνω στις πλευρές του είναι σημεία συνευθειακά (ευθεία Simson).*

Λύση:



Εστω Δ, Ε, Ζ οι προβολές ενός σημείου Μ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου πάνω στις πλευρές του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα.

Για να δείξουμε ότι τα Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Z\hat{E}M} + \mathrm{M\hat{E}\Delta} = 180°$.

- Επειδή $\mathrm{M\hat{Z}A} + \mathrm{M\hat{E}A} = 90° + 90° = 180°$, το ΜΖΑΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, οπότε $\mathrm{M\hat{E}Z} = \mathrm{M\hat{A}Z}$ **(1).**
- Επίσης από $\mathrm{M\hat{E}\Gamma} = \mathrm{M\hat{\Delta}\Gamma} = 90°$, προκύπτει ότι το ΜΕΔΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο και επομένως:

$\mathrm{M\hat{E}\Delta} + \mathrm{M\hat{\Gamma}\Delta} = 90° + 90° = 180°$ **(2)**

- Αλλά αφού ΑΒΓΜ εγγεγραμμένο θα είναι $\mathrm{M\hat{A}Z} = \mathrm{M\hat{\Gamma}\Delta}$ **(3)**

Από **(1)** και **(3)** προκύπτει ότι $\mathrm{M\hat{\Gamma}\Delta} = \mathrm{M\hat{E}Z}$ οπότε αντικαθιστώνας στην **(2)** βρίσκουμε ότι $\mathrm{M\hat{E}\Delta} + \mathrm{M\hat{E}Z} = 180°$ η οποία σημαίνει ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

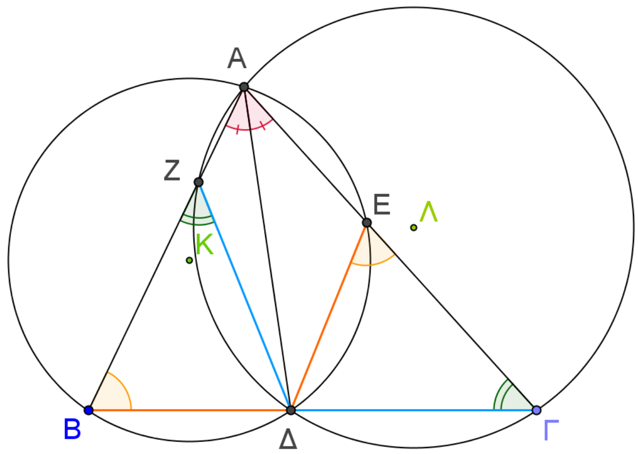
Σημείωση 1 : *Το 2013, την ώρα που έκανα αυτή την άσκηση στο Β3 αναρωτήθηκα γιατί δεν λέει ότι αφού ΜΓΔΕ εγγράψιμο ισχύει:* $\mathrm{M\hat{\Gamma}\Delta} = \mathrm{M\hat{E}Z}$.Η απάντηση είναι ότι δεν γνωρίζω ότι η ΕΖ προέκταση της ΔΕ (αυτό θέλω να αποδείξω!) και επομένως δεν ξέρω ότι η $\mathrm{M\hat{E}Z}$ είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

Σημείωση 2: Ενδιαφέρον το ότι έχουμε 2 εγγράψιμα και 1 εγγεγραμμένο.Αν έχουμε συνηθίσει να ψάχνουμε εγγράψιμα ίσως δεν «δούμε» το εγγεγραμμένο!Το λογικό είναι να ξεκινάμε από τον κύκλο που ενδεχομένως υπάρχει στο σχήμα, να εντοπίσουμε εγγεγραμμένα και μετά να ψάξουμε για εγγράψιμα.

Robert Simson (14 October 1687 – 1 October 1768) was a Scottish mathematician and professor of mathematics at the University of Glasgow.
The pedal line of a triangle is sometimes called the "Simson line" after him.[1]
Simson's contributions to mathematical knowledge took the form of critical editions and commentaries on the works of the ancient geometers.
https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Simson

Σ4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΓΕ = ΒΖ.*

Λύση:



● Η γωνία $Z\hat{A}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (Α,Δ,Γ) *(κύκλο που ορίζεται από τα σημεία Α, Δ, Γ ή αλλιώς περιγεγραμμένο του τριγώνου ΑΔΓ)* και η ΑΔ είναι διχοτόμος της, άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ή $\overset{\frown}{Z\Delta} = \overset{\frown}{\Delta\Gamma}$ οπότε και ΖΔ=ΔΓ **(1).**

● Ομοια η ΑΔ είναι διχοτόμος και της $B\hat{A}E$ που είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (Α, Δ, Β), άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ή $\overset{\frown}{\Delta E} = \overset{\frown}{\Delta B}$ οπότε και ΔΕ=ΒΔ **(2).**

Επειδή το ΑΒΔΕ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο θα είναι $E\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{A}\Gamma$ **(3).**

Επίσης και το ΑΖΔ Γ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, οπότε $B\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\Gamma$ **(4).**

Από **(3)** και **(4)** προκύπτει ότι $E\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Delta}Z$ από την οποία με την βοήθεια των **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΓΔΕ είναι ίσα.

β' τρόπος *(με μεταγενέστερη θεωρία)*

● Στον κύκλο (Α, Δ, Β) έχουμε: *§9.7 Θεώρημα Ι*

$B Z\cdot BA = B\Delta\cdot B\Gamma$ **(1)**

● Στον κύκλο (Α, Δ, Γ) έχουμε: *§9.7 Θεώρημα Ι*

$\Gamma E\cdot\Gamma A = \Gamma\Delta\cdot\Gamma B$ **(2)**

● Από το θεώρημα εσωτερική διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \quad \textbf{(3)}$$

Διαιρώ κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** και έχω:

$$\frac{BZ\cdot BA}{\Gamma E\cdot\Gamma A} = \frac{B\Delta\cdot\cancel{B\Gamma}}{\Gamma\Delta\cdot\cancel{\Gamma B}} \Leftrightarrow \frac{BZ}{\Gamma E}\cdot\frac{BA}{\Gamma A} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

Στην τελευταία σχέση αντικαθιστώντας βάση της **(3)** έχουμε:

$$\frac{BZ}{\Gamma E}\cdot\cancel{\frac{BA}{\Gamma A}} = \cancel{\frac{AB}{A\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{BZ}{\Gamma E} = 1 \Leftrightarrow BZ = \Gamma E$$