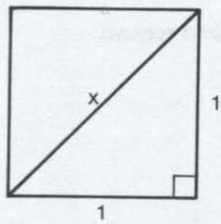
3.3 Άρρητοι Αριθμοί

Στα προηγούμενα συναντήσαμε τετραγωνικές ρίζες αριθμών που μπορούσαμε να τις υπολογίσουμε ακριβώς. Όμως υπάρχουν περιπτώσεις που δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια μια τετραγωνική ρίζα. Ας εξετάσουμε μια τέτοια περίπτωση.



Στο διπλανό σχήμα θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαγώνιο x του τετραγώνου. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, δηλαδή

$$x = \sqrt{2}.$$

Έτσι, για να υπολογίσουμε το μήκος της διαγωνίου πρέπει να υπολογίσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$.

Επειδή $1^2 = 1 < 2$ και $2^2 = 4 > 2$, ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να είναι φυσικός, αλλά κάποιος αριθμός μεταξύ 1 και 2.

Ας προσπαθήσουμε να τον βρούμε με προσέγγιση δεκάτου. Παίρνουμε τους αριθμούς

1,1 , 1,2 , 1,3 , 1,4 , 1,5 , 1,6 , 1,7 , 1,8 , 1,9

Υπολογίζοντας τα τετράγωνά τους βρίσκουμε ότι

$(1{,}1)^2 = 1{,}21 < 2$, ...,

$(1{,}4)^2 = 1{,}96 < 2$, ενώ $(1{,}5)^2 = 2{,}25 > 2$.

Άρα

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι
$\sqrt{2} \simeq 1{,}4$ με προσέγγιση δεκάτου.
Ας προσπαθήσουμε να βρούμε τον $\sqrt{2}$ με προσέγγιση εκατοστού. Παίρνουμε τους αριθμούς

1,41, 1,42, 1,43, 1,44, 1,45, 1,46, 1,47, 1,48, 1,49

Υπολογίζοντας τα τετράγωνά τους βρίσκουμε ότι

$(1{,}41)^2 = 1{,}9881 < 2$, ενώ $(1{,}42)^2 = 2{,}0164 > 2$.

Άρα

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42.$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι
$\sqrt{2} \simeq 1,41$ με προσέγγιση εκατοστού.
Αν συνεχίσουμε την ίδια εργασία, έχουμε διαδοχικά

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$
$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$
$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$
$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$
$$1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$$

Μέχρις εδώ, αν κι έχουμε προσεγγίσει τον αριθμό $\sqrt{2}$ πάρα πολύ, δεν μπορέσαμε να βρούμε δεκαδικό που να είναι ακριβώς ίσος με $\sqrt{2}$.

Σε μεγαλύτερη τάξη θα μάθουμε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός που να είναι ίσος με $\sqrt{2}$. Αυτό σημαίνει ότι ο $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να είναι δεκαδικός, ούτε περιοδικός δεκαδικός. Τον $\sqrt{2}$, όπως και κάθε άλλο αριθμό που δεν είναι ρητός, τον ονομάζουμε **άρρητο** αριθμό.

Γενικότερα η τετραγωνική ρίζα κάθε φυσικού αριθμού ο οποίος δεν είναι τετράγωνο φυσικού, είναι άρρητος αριθμός. Έτσι π.χ. οι $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, κτλ. είναι άρρητοι αριθμοί. Αλλά οι άρρητοι αριθμοί δεν είναι μόνο τετραγωνικές ρίζες. Όπως θα μάθουμε αργότερα, υπάρχουν και πολλοί άρρητοι που δεν είναι τετραγωνικές ρίζες.

Προσεγγίσεις τετραγωνικών ριζών

Τους άρρητους αριθμούς τους προσεγγίζουμε με ρητούς. Για παράδειγμα ο ρητός 1,414 είναι μια ικανοποιητική προσέγγιση του $\sqrt{2}$, γιατί $(1,414)^2 = 1,999396$. Αν θέλουμε μεγαλύτερη προσέγγιση παίρνουμε το ρητό 1,4142, γιατί $(1,4142)^2 = 1,9999616$ κτλ.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει ένας ειδικός πίνακας που περιέχει τις τετραγωνικές ρίζες των φυσικών αριθμών από το 0 ως το 499 με τρία δεκαδικά ψηφία.

Ο πίνακας αυτός χρησιμοποιείται ως εξής:

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την $\sqrt{126}$.

Στην πρώτη γραμμή του πίνακα βρίσκουμε τον αριθμό 6, δηλαδή το ψηφίο των μονάδων του 126, ενώ στην πρώτη στήλη βρίσκουμε τον αριθμό 12, δηλαδή τις δεκάδες του αριθμού. Η διασταύρωση της στήλης του 6 με τη γραμμή του 12 μας δίνει τον αριθμό 11,225, που είναι η ζητούμενη τετραγωνική ρίζα με προσέγγιση στρογγυλοποιημένη στο χιλιοστό, και γράφουμε $\sqrt{126} \simeq 11{,}225$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	1,000	1,414	1,732	2,000	2,236	2,449	2,646	2,828	3,000
1	3,162	3,317	3,464	3,606	3,742	3,873	4,000	4,123	4,243	4,359
2	4,472	4,583	4,690	4,796	4,899	5,000	5,099	5,196	5,292	5,385
3	5,477	5,568	5,657	5,745	5,831	5,916	6,000	6,083	6,164	6,245
4	6,325	6,403	6,481	6,557	6,633	6,708	6,782	6,856	6,928	7,000
5	7,071	7,141	7,211	7,280	7,348	7,416	7,483	7,550	7,616	7,681
6	7,746	7,810	7,874	7,937	8,000	8,062	8,124	8,185	8,246	8,307
7	8,367	8,426	8,485	8,544	8,602	8,660	8,718	8,775	8,832	8,888
8	8,944	9,000	9,055	9,110	9,165	9,220	9,274	9,327	9,381	9,434
9	9,487	9,539	9,592	9,644	9,695	9,747	9,798	9,849	9,899	9,950
10	10,000	10,050	10,100	10,149	10,198	10,247	10,296	10,344	10,392	10,440
11	10,488	10,536	10,583	10,630	10,677	10,724	10,770	10,817	10,863	10,909
12	10,954	11,000	11,045	11,091	11,136	11,180	11,225	11,269	11,314	11,358
13	11,402	11,446	11,489	11,533	11,576	11,619	11,662	11,705	11,747	11,790
14	11,832	11,874	11,916	11,958	12,000	12,042	12,083	12,124	12,166	12,207

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν από τον πίνακα οι τετραγωνικές ρίζες: α) $\sqrt{15}$, β) $\sqrt{427}$, γ) $\sqrt{156{,}86}$

Λύση

α) Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι $\sqrt{15} \simeq 3{,}873$

β) Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι $\sqrt{427} \simeq 20{,}664$

γ) Παρατηρούμε ότι είναι $\sqrt{156{,}86} \simeq \sqrt{157}$. Από τον πίνακα βρίσκουμε $\sqrt{157} \simeq 12{,}530$, άρα $\sqrt{156{,}86} \simeq 12{,}530$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε προσεγγιστικά τις ρίζες

α) $\sqrt{12}$, $\sqrt{1200}$, $\sqrt{0{,}12}$

β) $\sqrt{27}$, $\sqrt{2700}$, $\sqrt{0{,}27}$