Δυνάμεις με ακέραιο και ρητό εκθέτη *(version 28-3-2016)*

► $\alpha^{\nu} = \begin{cases} \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παραγοντες}} & ,\text{αν } \nu>1 \\ \alpha & ,\text{ αν } \nu=1 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \nu \in \mathbb{N}^*$

► $\alpha^0 = 1 \qquad \alpha \neq 0,\ \nu \in \mathbb{N}^*$

► $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}} = \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\nu} \quad \alpha \neq 0,\ \nu \in \mathbb{N} \qquad\qquad \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu} \quad \alpha, \beta \neq 0,\ \nu \in \mathbb{N}$

► $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \quad \alpha > 0,\ \mu \in \mathbb{Z},\ \ \nu \in \mathbb{N}^*$

Να υπολογιστούνε οι δυνάμεις: (όπου δεν ορίζονται συμπληρώνετε *«δεν ορίζεται»)*

$4^3 =$ $\qquad$ $8^0 =$ $\qquad$ $0^0 =$

$2^{-3} =$ $\qquad$ $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-3} =$ $\qquad$ $0^{-5} =$

$3^{\frac{5}{6}} =$ $\qquad$ $8^{\frac{2}{3}} =$ $\qquad$ $(-2)^{\frac{3}{2}} =$

$27^{-\frac{2}{3}} =$

Ιστορία του συμβολισμού των δυνάμεων

In **1637** exponents in the modern notation (although with positive integers only) were used by Rene Descartes (1596-1650) in “Geometrie”. **Descartes** tended not to use 2 as an exponent, however, usually writing aa rather than a^2, perhaps because aa occupies no less space than a^2.

Negative integers as exponents were first used with the modern notation by Isaac Newton in June 1676 in a letter to Henry Oldenburg, secretary of the Royal Society, in which he described his discovery of the general binomial theorem twelve years earlier (Florian Cajori 1919, page 178).

Fractional exponents in the modern notation were first used by Isaac Newton in the 1676 letter referred to above.

Δυνάμεις με άρρητο εκθέτη

Γεννιέται τώρα το ερώτημα:

Μπορούμε να ορίσουμε δυνάμεις της μορφής α^x με x **άρρητο**, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρούνται οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ρητό εκθέτη; Μπορούμε για παράδειγμα να ορίσουμε την $3^{\sqrt{2}}$;

Όπως είδαμε *(βιβλίο Β' Γυμνασίου σελ. 104(μάλλον 108))* οι δεκαδικές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ κατά προσέγγιση ακέραιας μονάδας, δεκάτου, εκατοστού κτλ. είναι

1, 1,4 , 1,41 , 1,414 , 1,4142 , 1,41421 , 1,414213, …**(1)**

Ας πάρουμε τώρα την ακολουθία αυτή των δεκαδικών προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$ και την αντίστοιχη ακολουθία των δυνάμεων του 3:

3^1, $3^{1,4}$, $3^{1,41}$, $3^{1,414}$, $3^{1,4142}$, $3^{1,41421}$, $3^{1,414213}$, … **(2)**

Με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε ότι:

$3^1 = 3$

$3^{1,4} \approx 4{,}\ 6555367$

$3^{1,41} \approx 4{,}7\ 069650$

$3^{1,414} \approx 4{,}72\ 76950$

$3^{1,4142} \approx 4{,}728\ 7339$

$3^{1,41421} \approx 4{,}728\ 7859$

$3^{1,414213} \approx 4{,}7288\ 015$

Αν παρατηρήσουμε τους αριθμούς αυτούς μας δίνεται η εξής εντύπωση: Όταν το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της ακολουθίας (1) αυξάνει, οι όροι της ακολουθίας (2) φαίνεται να προσεγγίζουν ένα ορισμένο αριθμό, που λέγεται **οριακή τιμή** ή **όριο** της ακολουθίας αυτής. Είναι επομένως λογικό να ορίσουμε τη δύναμη $3^{\sqrt{2}}$ ως την πιο πάνω οριακή τιμή. Έτσι με προσέγγιση τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων είναι $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}7288$.

Γενικά αποδεικνύεται ότι:

● Αν $\alpha > 0$, x **άρρητος** και ρ_ν η δεκαδική προσέγγιση του x με ν δεκαδικά ψηφία, τότε καθώς το ν αυξάνει **τείνοντας** στο $+\infty$, οι όροι της ακολουθίας α^{ρ_ν} **«προσεγγίζουν»** έναν ορισμένο προγματικό αριθμό, τον οποίο στο εξής θα ονομάζουμε όριο της ακολουθίας α^{ρ_ν} και θα συμβολίζουμε α^x .

Γράφουμε συμβολικά $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha^{\rho_\nu} = \alpha^x$ (limit=όριο)

● Επιπλέον, για κάθε x > 0, ορίζουμε $0^x = 0$.

► Οι ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν και για δυνάμεις με πραγματικούς εκθέτες (δες το διπλανό πλαίσιο).

Αν α, β είναι **θετικοί** πραγματικοί αριθμοί και $x_1,\ x_2,\ x \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\alpha^{x_1}\cdot\alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2}$$
$$\alpha^{x_1}:\alpha^{x_2} = \alpha^{x_1-x_2}$$
$$\left(\alpha^{x_1}\right)^{x_2} = \alpha^{x_1\cdot x_2}$$
$$(\alpha\beta)^x = \alpha^x\beta^x$$
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$$

● Να υπολογιστούνε *(ή απλά να απλοποιηθούν)* οι παρακάτω παραστάσεις:

$\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} =$ $\qquad$ $\dfrac{2^{\sqrt{18}}}{2^{\sqrt{8}}} =$

$\left(2^{\varepsilon\varphi 25°}\right)^{\sigma\varphi 25°} =$ $\qquad$ $4^{\sqrt{3}}\cdot 0{,}25^{\sqrt{3}} =$