ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ *(version 28-3-2016)*

►Με $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$ ισχύει: $\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Rightarrow x_2 = x_1$

(Λέμε ότι η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ είναι **1-1 διαβάζουμε «ένα προς ένα»)**

Απόδειξη:

Θα κάνουμε την απόδειξη με **απαγωγή σε άτοπο**.Θα θεωρήσουμε ότι α>1.Η απόδειξη είναι παρόμοια και για 0<α<1

►Εστω ότι $\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2}$.

Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει $x_1 = x_2$.

Τότε θα ισχύει ή $x_1 < x_2$ ή $x_1 > x_2$.

- Αν όμως ίσχυε $x_1 < x_2$, τότε επειδή η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ για α>1 είναι γνησίως αύξουσα, θα έχουμε ότι $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$ που έρχεται σε αντίθεση με τα δεδομένα ($\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2}$) (άτοπο).
- Αν ίσχυε ότι $x_1 > x_2$ τότε επειδή η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ για α>1 είναι γνησίως αύξουσα, θα έχουμε ότι $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$ που επίσης έρχεται σε αντίθεση με τα δεδομένα ($\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2}$) (άτοπο).

Φτάσαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι δεν ισχύει $x_1 = x_2$.Αρα τελικά $x_1 = x_2$.

Επειδή η $f(x) = \alpha^{x_1}$ είναι συνάρτηση έχουμε και $x_2 = x_1 \Rightarrow \alpha^{x_1} = \alpha^{x_2}$ οπότε τελικά την ισοδυναμία

$\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_2 = x_1$

►Να λυθούν οι εξισώσεις:

Υπόδειξη : Προσπαθούμε και στα δύο μέλη να δημιουργήσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση και μετά εξισώνουμε σύμφωνα με την πιο πάνω ιδιότητα τους εκθέτες.

Χρήσιμα: $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$ $\quad \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

$3^{5x-1} = 3^{x+7} \Leftrightarrow$ *(Απ :x=2)*

Α2 i) $2^x = 64 \Leftrightarrow ....$ *(Απ :x=6)*

(προσθήκη μου) $2^x = -4 \Leftrightarrow ....$

ii) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow ....$ *(Απ :x=3*iii)

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 4 \Leftrightarrow ....$ *(Απ :x= -2)*

iv) $3^{-x}=\frac{1}{81}\Leftrightarrow ....$ *(Απ :x=4)*

v) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x}=\frac{64}{27}\Leftrightarrow ....$ *(Απ :x = -3)*

vi) $27^{4x}=9^{x+1}\Leftrightarrow ....$ *(Απ : $x=\frac{1}{5}$)*

]vii) $32^{x}=16^{1-x}\Leftrightarrow ....$ *(Απ : $x=\frac{4}{9}$)*

viii) $3^{x^{2}-x-2}=1\Leftrightarrow ....$ *(Απ :x=2 ή x = -1)*

A3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{2x+1}-4\cdot 2^{x}=0\Leftrightarrow$ *(Απ :x = 1)*

ii) $2\cdot 4^{x}-5\cdot 2^{x}+2=0\Leftrightarrow$ *(Απ :x=1 ή x = -1)*

iii) $3^{2x+1}-26\cdot 3^{x}-9=0\Leftrightarrow$ ***SOS*** $\alpha^{x}>0$ *(Απ : x = 2)*

A5. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases}8^{2x+1}=32\cdot 4^{4y-1}\\ 5\cdot 5^{x-y}=5^{2y+1}\end{cases}$ *Απ :* $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$

ii) $\begin{cases}3^{x}+2^{y}=11\\ 3^{x}-2^{y}=7\end{cases}$ *Απ :* $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$