17ο Γενικό Λύκειο Αθηνών Σχολικό Έτος 2013-14

Τάξη: Β' Λυκείου

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Αθήνα 16-6-2014

Εισηγητές: Ν. Καρακάσης – Δ. Αθανασίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι:

Ενα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα το $P(x)$ δηλαδή αν και μόνο άν $P(\rho)=0$.

Απόδειξη: *(σ.135 σχολικό)*

- Έστω ότι το x - ρ είναι παράγοντας του P(x). Τότε

$P(x) = (x - \rho)\pi(x)$

Από την ισότητα αυτή για x = ρ παίρνουμε

$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) = 0$,

που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του P(x).

- **Αντιστρόφως**: Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή ισχύει P(ρ) = 0. Τότε από τη σχέση

$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$

παίρνουμε

$P(x) = (x - \rho)\pi(x)$,

που σημαίνει ότι το x - ρ είναι παράγοντας του P(x).

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος

δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, τότε $\sigma\upsilon\nu(-x)>0$

β. Αν $0<\alpha<1$, τότε η συνάρτηση $f(x)=a^x$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Ισχύει, τότε $\eta\mu(x-\pi)=\eta\mu(-x)$

δ. Ισχύει $\sigma\upsilon\nu(\ln 1)=\ln(\sigma\upsilon\nu 2\pi)$

ε. Οι αριθμοί lnα και $\ln\frac{1}{\alpha}$ όπου α>0, είναι αντίθετοι.

Λύση:

α. Σωστό. Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x$. Επειδή για $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ είναι $\sigma\upsilon\nu x>0$ θα είναι και

$\sigma\upsilon\nu(-x)>0$.

β. Λάθος (είναι γνησίως φθίνουσα)

γ. Σωστό $\eta\mu(x-\pi)=\eta\mu[-(\pi-x)]=-\eta\mu(\pi-x)=-\eta\mu x=\eta\mu(-x)$

δ. Λάθος Γνωρίζουμε πως $\ln 1=0$ άρα $\sigma\upsilon\nu(\ln 1)=\sigma\upsilon\nu 0=1$. Εξάλλου $\sigma\upsilon\nu 2\pi=1$ οπότε

$\ln(\sigma\upsilon\nu 2\pi)=\ln 1=0$

ε. Σωστό $\ln\frac{1}{\alpha}=\ln 1-\ln\alpha=0-\ln\alpha=-\ln\alpha$

Γ. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις αφού πρώτα τις μεταφέρετε στην κόλλα σας

α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln|x|$ είναι το............

β. $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow$ ....

Απάντηση:

α. Πρέπει $|x|>0$. Αυτό ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ εκτός από x=0. Αρα το πεδίο ορισμού είναι το

$\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

β. $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x=2k\pi\pm\theta,\quad k\in\mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα $\left.\begin{array}{r}\lambda x + y = 2\\ 4x + \lambda y = 4\end{array}\right\}$ έχει μοναδική λύση;

β. Αν $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2,2\}$ βρείτε την μοναδική λύση $(x_0,\ \mathrm{y}_0)$.

γ. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2,2\}$ ισχύει $x_0 > 5$.

Λύση:

α. Είναι $D = \begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 4 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$

$$D_x = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & \lambda\end{vmatrix} = 2\lambda - 4 = 2(\lambda - 2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix}\lambda & 2\\ 4 & 4\end{vmatrix} = 4\lambda - 8 = 4(\lambda - 2)$$

Εχει μοναδική λύση όταν

$D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 \neq 0$ και $\lambda + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} - \{-2,2\}$.

β. Αν $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2,2\}$ τότε :

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{2(\lambda - 2)}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = \frac{2}{\lambda + 2}$$

$$y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{4(\lambda - 2)}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = \frac{4}{\lambda + 2}$$

δηλαδή η μοναδική λύση είναι: $\left(\dfrac{2}{\lambda + 2},\ \dfrac{4}{\lambda + 2}\right)$

γ. $x_0 > 5 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\lambda + 2} > 5 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\lambda + 2} - 5 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\lambda + 2} - \dfrac{5(\lambda + 2)}{(\lambda + 2)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2 - 5\lambda - 10}{\lambda + 2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-5\lambda - 8}{\lambda + 2} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5\lambda + 8}{\lambda + 2} < 0 \Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{(5\lambda + 8)}_{\rho i\zeta\alpha\ -\frac{8}{5}}\underbrace{(\lambda + 2)}_{\rho i\zeta\alpha\ -2}}_{\alpha = 5 > 0} < 0 \Leftrightarrow -2 < \lambda < -\frac{8}{5}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Να βρείτε τις ρίζες τις εξίσωσης $2x^3 - 3x + 1 = 0$

β. Αν x_1 είναι η ακέραια ρίζα της εξίσωσης (1) τότε να λύσετε την ανίσωση

$e^{-x+2014} > x_1$

γ. Αν $x_2,\ x_3\ (x_2 < x_3)$ είναι οι άρρητες ρίζες της εξίσωσης (1) τότε να λύσετε την εξίσωση

$\ln x = x_3 - x_2$

Λύση:

α. $2x^3 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2-1) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow 2x(x-1)(x+1) - (x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)[2x(x+1)-1] = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+2x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1=0$ ή $2x^2+2x-1=0$.

$\Leftrightarrow x = 1$ ή $2x^2+2x-1=0$

$\alpha = 2\ ,\ \beta = 2,\ \gamma = -1$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 4+8 = 12$

$$x_{2,3} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\pm\sqrt{12}}{2\cdot 1} = \frac{-2\pm\sqrt{4\cdot 3}}{2\cdot 2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \qquad x_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

2ος τρόπος

Αφού το πολυώνυμο έστω $P(x)$ στο 1ο μέλος έχει ακέραιες ρίζες, σύμφωνα με το θεώρημα ακέραιων ριζών, οι πιθανές ακέραιες ρίζες του είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου 1 δηλαδή +1 ή -1.

2	0	-3	1	ρ=1
↓	2	2	-1	
2	2	-1	**0**	

Αρα $P(x) = (x-1)(2x^2+2x-1)$

Οπότε εκτός από την $x_1 = 1$ ρίζες είναι και οι ρίζες της $2x^2+2x-1=0$

$\alpha = 2\ ,\ \beta = 2,\ \gamma = -1$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 4+8 = 12$

$$x_{2,3} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\pm\sqrt{12}}{2\cdot 1} = \frac{-2\pm\sqrt{4\cdot 3}}{2\cdot 2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

β. $e^{-x+2014} > x_1 \Leftrightarrow e^{-x+2014} > 1 \Leftrightarrow e^{-x+2014} > e^0 \overset{e^x \text{ γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} -x+2014>0 \Leftrightarrow 2014 > x \Leftrightarrow x < 2014$

γ. $\ln x = x_3 - x_2 \Leftrightarrow \ln x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} - \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \ln x = \frac{-1+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\ln x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = e^{\sqrt{3}}$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Αν $\ln a = 3$ και $\ln\beta = 5$ να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\ln\frac{e^{20}a^2}{\beta^2}$$

Β. Να λύσετε την εξίσωση

$$\log(x+1)+\log(x-1)=\log(13-5x)$$

Λύση:

Α. $\ln\frac{e^{20}a^2}{\beta^2}=\ln\left(e^{20}a^2\right)-\ln\left(\beta^2\right)=\ln\left(e^{20}\right)+\ln\left(a^2\right)-\ln\left(\beta^2\right)=20\ln e+2\ln a-2\ln\beta=$

$20\cdot1+2\cdot3-2\cdot5=20+6-10=16$

Β. Αρχικά κάνουμε περιορισμούς:

$$\left.\begin{array}{l} x+1>0 \\ x-1>0 \\ 13-5x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x>-1 \\ x>1 \\ 13>5x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x>-1 \\ x>1 \\ \frac{13}{5}>x \end{array}\right\} \Leftrightarrow 1<x<\frac{13}{5} \Leftrightarrow 1<x<2+\frac{3}{5}$$

Με τους περιορισμούς αυτούς έχουμε:

$$\log(x+1)+\log(x-1)=\log(13-5x)\Leftrightarrow\log\left[(x+1)(x-1)\right]=\log(13-5x)\overset{\text{Η συνάρτηση logx είναι 1-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$(x+1)(x-1)=13-5x\Leftrightarrow x^2-1=13-5x\Leftrightarrow x^2+5x-1-13=0\Leftrightarrow x^2+5x-14=0$$

$\alpha=1$, $\beta=5$, $\gamma=-14$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=5^2-4\cdot1\cdot(-14)=25+56=81$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-5\pm\sqrt{81}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm9}{2}$$

$x_1=\frac{-5-9}{2}=\frac{-14}{2}=-7$ (απορρίπτεται)

$$x_2=\frac{-5+9}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Αρα λύση είναι η $x=2$.