ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 96

Διαγώνισμα μαθηματικών Χρήστος Λαζαρίδης

Α1. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-μ άν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

i) Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.

ii) Για κάθε γωνία α ισχύει $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ *(εκτός εξεταστέας ύλης)*

iii) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε πραγματικό α>0.

iv) Αν και $0 < \alpha \neq 1$ τότε για οποιαδήποτε $\theta_1,\ \theta_2 > 0$ ισχύει:

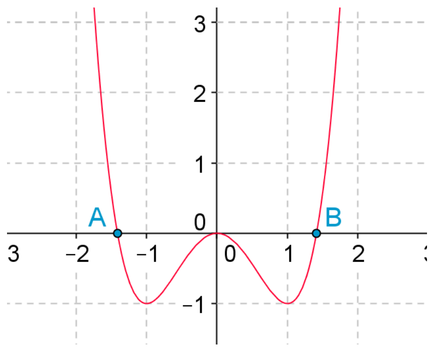
$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$

v) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα όταν για οποιαδήποτε x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ ισχύει :

$f(x_1) > f(x_2)$.

vi) Εστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές.Αν ο ακέραιος ρ≠0 είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0, τότε σε κάθε περίπτωση ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης.

Β. Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

Να εξετάσετε αν η f παρουσιάζει ακρότατα και αν η f είναι άρτια.

Β2. Αν επιπλέον $f(x) = x^4 - 2x^2$, τότε:

Να υπολογίστε τα σημεία Α και Β και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$g(x) = (x-1)^4 - 2x^2 + 4x - 2$

Β3. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda \boldsymbol{x} + \mathrm{f}(1) \cdot \boldsymbol{y} = \lambda - 1 \\ \lambda^2 \boldsymbol{x} - \dfrac{\mathrm{f}(2)}{4} \cdot \boldsymbol{y} = \lambda \end{cases}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι αν λ≠0 και λ≠2, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) τέτοια ώστε

$(x_0 \cdot y_0)^{2015} = 1$

Γ. Εστω συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\left[\eta\mu(\pi-x)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x$ και να λύσετε την εξίσωση $f^2(x)+4\sigma\upsilon\nu x-4=0$ στο διάστημα $[0,\ 4\pi]$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι: $\frac{f(x)}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=\frac{2}{f(x)}$

Γ3. Αν $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ να αποδείξετε ότι $f(\alpha)>\sigma\upsilon\nu\alpha+\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha$

Δ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(\ln x)$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(2)<0$

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $10^{f(x)}=\frac{1}{2}$

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{e})+f(\sqrt[3]{e})=-\log 6$

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

Α1(Θεώρημα σ.135)

Α2.

Λ *σ. 129*

Σ

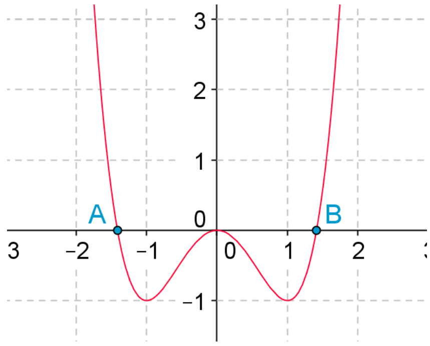
Λ *Είναι γνησίως αύξουσα μόνο για α>1.*

Σ

Λ

Λ Το ρ είναι πιθανή ρίζα και για να ελένξουμε αν πράγματι είναι κάνουμε αντικατάσταση στο πολυώνυμο όπου x=ρ για να δούμε αν βρούμε ή όχι 0 ή κάνουμε σχήμα Horner.(είναι ρίζα όταν το τελευταίο δεξιά κουτάκι έχει 0)

B Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



B1. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

Να εξετάσετε αν η f παρουσιάζει ακρότατα και αν η f είναι άρτια.

B2. Αν επιπλέον $f(x)=x^4-2x^2$, τότε:

Να υπολογίστε τα σημεία Α και Β και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=(x-1)^4-2x^2+4x-2$

B3. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+\mathrm{f}(1)\cdot y=\lambda-1 \\ \lambda^2 x-\dfrac{\mathrm{f}(2)}{4}\cdot y=\lambda \end{cases}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι αν λ≠0 και λ≠2, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0,y_0) τέτοια ώστε

$(x_0\cdot \mathrm{y}_0)^{2015}=1$

Λύση:

B1.Η συνάρτηση είναι:

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$.

Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,0]$.

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$.

Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -1, το f(-1).

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 0 το f(0).

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 1 το f(1). (τα τοπικά ελάχιστα είναι και ολικά)

Είναι άρτια γιατί έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των y’y.

B2. • Τα σημεία Α και Β είναι τα 2 από τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των x τα οποία όπως ξέρουμε έχουν y=f(x)=0 οπότε για να βρούμε τις τετμημένες τους (τα x) λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x^2-2)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \text{ ή } x^2-2=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^2=2$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-\sqrt{2} \text{ ή } x=\sqrt{2}$$

Αρα $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ και $\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 0)$

- $g(x)=(x-1)^4-2x^2+4x-2=(x-1)^4-2\left(x^2-2x+1\right)=(x-1)^4-2(x-1)^2=f(x-1)$ Αρα η γραφική παράσταση της g προκύπτει από την γραφική παράσταση της f με οριζόντια μετακίνηση κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά.

- $f(1)=1^4-21^2=1-2=-1$

$f(2)=2^4-2\cdot 2^2=16-2\cdot 4=16-8=8$

Αρα το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} \lambda \boldsymbol{x}-1\boldsymbol{y}=\lambda-1 \\ \lambda^2\boldsymbol{x}-\frac{8}{4}\cdot \boldsymbol{y}=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \boldsymbol{x}-1\boldsymbol{y}=\lambda-1 \\ \lambda^2\boldsymbol{x}-2\cdot \boldsymbol{y}=\lambda \end{cases}$$

● Υπολογίζουμε τις ορίζουσες και τις παραγοντοποιούμε:

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -2 \end{vmatrix}=-2\lambda+\lambda^2=\lambda(\lambda-2)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix}=-2(\lambda-1)+\lambda=-2\lambda+2+\lambda=-\lambda+2=-(\lambda-2)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} \lambda & \lambda-1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda^2(\lambda-1)=\lambda^2-\lambda^3+\lambda^2=2\lambda^2-\lambda^3=-\lambda^2(\lambda-2)$$

αν λ≠0 και λ≠2, τότε $D\neq 0$ οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την:

$$x_0=\frac{D_x}{D}=\frac{-(\lambda-2)}{\lambda(\lambda-2)}=-\frac{1}{\lambda}$$

$$y_0=\frac{D_y}{D}=\frac{-\lambda^2(\lambda-2)}{\lambda(\lambda-2)}=-\lambda$$

$$x_0\cdot y_0=-\frac{1}{\lambda}(-\lambda)=1$$

Αρα $\left(x_0\cdot \mathrm{y}_0\right)^{2015}=1^{2015}=1$

Γ. Εστω συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\left[\eta\mu(\pi-x)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x$ και να λύσετε την εξίσωση $f^2(x)+4\sigma\upsilon\nu x-4=0$ στο διάστημα $[0,\ 4\pi]$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι: $\frac{f(x)}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=\frac{2}{f(x)}$

Γ3. Αν $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ να αποδείξετε ότι $f(\alpha)>\sigma\upsilon\nu\alpha+\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha$

Λύση:

Γ1. $f(x)=\frac{1}{2}\left[\eta\mu(\pi-x)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\frac{1}{2}[\eta\mu x+\eta\mu x]=\frac{1}{2}2\eta\mu x=\eta\mu x$

$f^2(x)+4\sigma\upsilon\nu x-4=0\Leftrightarrow\eta\mu^2x+4\sigma\upsilon\nu x-4=0\Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu^2x+4\sigma\upsilon\nu x-4=0\Leftrightarrow-\sigma\upsilon\nu^2x+4\sigma\upsilon\nu x-3=0$

$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2x-4\sigma\upsilon\nu x+3=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=1$ ή συνx=3

- Η συνx=3 είναι αδύνατη αφού ως γνωστόν $-1\le$ συνx ≤ 1 για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- Η $\sigma\upsilon\nu x=1$ έχει ως λύσεις $x=2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ και επειδή μας ενδιαφέρουν οι λύσεις στο διάστημα $[0,\ 4\pi]$, αυτές είναι 0, 2π, 4π.

Γ2. 1^{o} μέλος$=\frac{f(x)}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\frac{\eta\mu^2x+(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}=$

$=\frac{\eta\mu^2x+1+2\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}=\frac{2+2\sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}=\frac{2(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}=\frac{2}{\eta\mu x}=\frac{2}{f(x)}$= 2^{o} μέλος

Γ3. Αν $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ τότε συνα<0, εφα<0 και σφα<0 οπότε και $\sigma\upsilon\nu\alpha+\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha<0$, ενώ $f(\alpha)=\eta\mu\alpha>0$ οπότε $f(\alpha)>\sigma\upsilon\nu\alpha+\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha$.

Δ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(\ln x)$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(2)<0$

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $10^{f(x)}=\frac{1}{2}$

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f\left(\sqrt{e}\right)+f\left(\sqrt[3]{e}\right)=-\log 6$

Λύση:

Δ1. $\left.\begin{matrix} x>0 \\ \ln x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x>0 \\ \ln x>\ln 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x>0 \\ x>1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x>1$

Δ2. Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$f(2)<0 \Leftrightarrow \log(\ln 2)<0$.Δεδομένου ότι e=2,71828... *(σχολικό σ.168)*

$2<e \Rightarrow \ln(2)<\ln(e) \Rightarrow \ln(2)<1 \Rightarrow \log(\ln(2))<\log 1 \Rightarrow \log(\ln(2))<0 \Rightarrow f(2)<0$

Δ3. Περιορισμοί: Πρέπει να ορίζεται το f(x) το οποίο όπως δείξαμε στο Δ1 ισχύει για x>1:

$10^{f(x)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 10^{\log(\ln x)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\sqrt{e}$ δεκτή αφού $\sqrt{e}$>1.

Δ4. $f\left(\sqrt{e}\right)+f\left(\sqrt[3]{e}\right)=\log\left(\ln\sqrt{e}\right)+\log\left(\ln\sqrt[3]{e}\right)=\log\left(\frac{1}{2}\right)+\log\left(\frac{1}{3}\right)=\log 1-\log 2+\log 1-\log 3=$

$0-\log 2+0-\log 3=-(\log 2+\log 3)=-\log(2\cdot 3)=-\log 6$.