1ο ΓΕΛ ΚΑΡΔΙΤΣΑΣ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$.

Α2. Να σημειώσετε το σωστό Σ ή το λάθος Λ

i. Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο	Σ	Λ
ii. $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}$	Σ	Λ
iii. Ενα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το x-ρ αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$	Σ	Λ
iv. $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta,\quad \theta>0$ και $0<\alpha \neq 1$	Σ	Λ
v. Ισχύει πάντα $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$	Σ	Λ

Α3. Πως ορίζεται ο λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, με βάση 0<α≠1

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 & (1) \\ x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

Β2. Να λυθεί η εξίωσωση

$$\left(2\eta\mu x + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sigma\upsilon\nu x\right) = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο P(x)=$x^3+\alpha x^2+\beta x-2$ το οποίο έχει παράγοντα το x-2.

Γ1. Να δείξετε ότι: 2α+β=-3 **μον.6**

Γ2. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το με το (Χ-3) είναι ίσο με 4 τότε

i. Να δείξετε ότι α=-4 και β=5. **μον.9**

ii. Για α=-4 και β= 5 δείξτε ότι το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του P(x). **μον.10**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left(x^2-8x+17\right)$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμούτ ης συνάρτησης **Μονάδες 8**

Δ2. Να δείξετε ότι $f(2)=f(1)-\log 2$ **Μονάδες 8**

Δ3. Να λυθεί η ανίσωση $f(x)>f(2)$ **Μονάδες 9**

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΣ ΑΓΓΕΛΟΣ

ΤΣΙΩΝΑΣ ΒΗΣΣΑΡΗΣ

ΖΩΙΤΣΑΚΟΥ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΑ

ΠΠΑΛΟΥ ΑΓΛΑΙΑ

Σημείωση: Τις εκφωνήσεις τις βρήκα στο http://eisatopon.blogspot.gr/2013/05/2013_21.html

Τις λύσεις τις έκανα εγώ. Αν εντοπίσετε λάθη ή έχετε άλλες παρατηρήσεις παρακαλώ αν μπορέσετε να μου τις επισημάνετε.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

Απάντηση:

Αν Μ (x, y) είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι :

x = συνω και y = ημω

Επειδή όμως ,

(ΟΜ) =1 και $(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2$ *(Πυθαγόρειο Θεώρημα)*

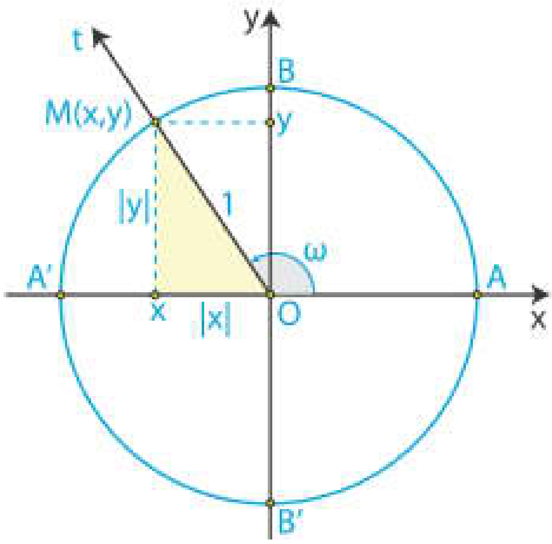
$= x^2 + y^2$ (ιδιότητα των απόλυτων τιμών $|\alpha|^2 = \alpha^2$)

θα ισχύει :

$x^2 + y^2 = 1$

οπότε θα έχουμε :

$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$



Α2. Να σημειώσετε το σωστό Σ ή το λάθος Λ

i. Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο Σ Λ

Απάντηση:

Λάθος έχουν αντίθετα ημίτονα

ii. $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ Σ Λ

Απάντηση:

Λάθος.Το σωστό θα ήταν $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

iii. Ενα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το x-ρ αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$ Σ Λ

Απάντηση:

Σωστό.(θεώρημα σ.135)

iv. $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$, θ>0 και $0<\alpha \neq 1$ Σ Λ

Απάντηση:

Σωστό.

v. Ισχύει πάντα $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$ Σ Λ

Απάντηση:

Λάθος.Η συνάρτηση α^x είναι γνησίως αύξουσα μόνο για α>1.

Α3. Πως ορίζεται ο λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, με βάση 0<α≠1

Απάντηση:

Ο $\log_\alpha \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε τον θ.

Από τον ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:

$\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 & (1) \\ x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

Β2. Να λυθεί η εξίσωση

$$\left(2\eta\mu x + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sigma\upsilon\nu x\right) = 0$$

Λύση:

Β1. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 & (1) \\ x + y = 1 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow$

Επιλύουμε την (2), ως προς έναν άγνωστο, ως προς y , και αντικαθιστούμε στη (2).

Έχουμε

$x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$ (3).

$$x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x \cancel{+x^2} + x \cancel{-x^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

Είναι $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Από την (3) έχουμε: $y_1 = 1 - x_1 = 1 - 2 = -1$ και $y_2 = 1 - x_2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$

Αρα το σύστημα έχει δύο λύσεις τις $(2,-1)$ και $(-1,2)$.

Β2. $\left(2\eta\mu x+\sqrt{2}\right)(1-\sigma\upsilon\nu x)=0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x+\sqrt{2}=0$ ή $1-\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu x=1$

$\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ή $\sigma\upsilon\nu x=1$

$\eta\mu x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}, \kappa\in\mathbb{Z}$ ή $x=2\kappa\pi+\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right), \kappa\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}, \kappa\in\mathbb{Z}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4}, \kappa\in\mathbb{Z}$

$\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi,\ \ \kappa\in\mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο P(x)=x^3+αx^2+βx-2 το οποίο έχει παράγοντα το x-2.

Γ1. Να δείξετε ότι: 2α+β=-3 **μον.6**

Γ2. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το με το (X-3) είναι ίσο με 4 τότε

i. Να δείξετε ότι α=-4 και β=5. **μον.9**

ii. Για α=-4 και β= 5 δείξτε ότι το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του P(x). **μον.10**

Λύση:

Γ1. Αφού έχει παράγοντα το x-2 θα ισχύει:

$P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3+\alpha 2^2+\beta 2-2=0 \Leftrightarrow 8+4\alpha+2\beta-2=0 \Leftrightarrow$

$4\alpha+2\beta=-6 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-3$ (1)

Γ2. i. Από γνωστό θεώρημα γνωρίζουμε ότι:

$P(3)=4 \Leftrightarrow 3^3+\alpha 3^2+\beta 3-2=4 \Leftrightarrow 27+9\alpha+3\beta-2=4 \Leftrightarrow 25+9\alpha+3\beta=4 \Leftrightarrow$

$9\alpha+3\beta=4-25 \Leftrightarrow 9\alpha+3\beta=-21 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-7$ (2)

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2)

$$\begin{cases}4\alpha+2\beta=-6\\3\alpha+\beta=-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\alpha+2(-3\alpha-7)=-6\\\beta=-3\alpha-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\alpha-6\alpha-14=-6\\\beta=-3\alpha-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\alpha=8\\\beta=-3\alpha-7\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-4\\\beta=-3(-4)-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-4\\\beta=12-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-4\\\beta=5\end{cases}$$

Αρα $P(x) \Leftrightarrow x^3-4x^2+5x-2=0$

Αφού μας δίνεται ότι το x-2 είναι παράγοντας εφαρμόζω το σχήμα Horner:

Συντελεστές του P(x) **ρ**

1	-4	5	-2	2
↓	2	-4	2	
1	-2	1	0	

Συντελεστές Πηλίκου **Υπόλοιπο**

Αρα $P(x)=(x-2)(x^2-2x+1)=(x-2)(x-1)^2$ *(Χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$).*

Αρα αφού $P(x)=(x-2)(x-1)^2$, το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(x^2-8x+17)$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμούτ ης συνάρτησης **Μονάδες 8**

Δ2. Να δείξετε ότι $f(2)=f(1)-\log 2$ **Μονάδες 8**

Δ3. Να λυθεί η ανίσωση $f(x)>f(2)$ **Μονάδες 9**

Λύση:

Δ1. Πρέπει $x^2-8x+17>0$

Είναι $\alpha=1$, $\beta=-8$, $\gamma=17$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 17=64-68=-4$$

Αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2-8x+17$ είναι αρνητική, τότε *(όπως μάθαμε στην Α Λυκείου)* το τριώνυμο θα είναι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ομόσημο του α=1>0 (με α συμβολίζουμε τον συντελεστή του x^2) δηλαδή γι κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι θετικό.Οπότε το πεδίο ορισμού είναι $D_f=\mathbb{R}$ (το D από την λέξη domain)

Δ2. $f(2)=\log(2^2-8\cdot 2+17)=\log(4-16+17)=\log 5$ (1)

$f(1)-\log 2=\log(1^2-8\cdot 1+17)-\log 2=\log(1-8+17)-\log 2=$

$\log 10-\log 2=\log\frac{10}{2}=\log 5$ (2)

Αφού και το 1ο και το 2ο μέλος είναι ίσα με log5 θα είναι και μεταξύ τους ίσα δηλαδή :

$f(2)=f(1)-\log 2$

Δ3. Αφού όπως δείξαμε στο **Δ1** η f(x) ορίζεται για όλα τα $x\in\mathbb{R}$, η ανίσωση ορίζεται για όλα τα $x\in\mathbb{R}$.

$f(x)>f(2)\Leftrightarrow \log(x^2-8x+17)>\log(2^2-8\cdot 2+17)\Leftrightarrow \log(x^2-8x+17)>\log 5$

Επειδή η συνάρτηση logx είναι γνησίως αύξουσα από την τελευταία σχέση παίρνουμε ισοδύναμα:

$x^2-8x+17>5\Leftrightarrow x^2-8x+17-5>0\Leftrightarrow x^2-8x+12>0$

Είναι $\alpha=1,\ \beta=-8,\ \gamma=12$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 12=64-48=16$

$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{8\pm 4}{2}$

$x_1=\frac{8+4}{2}=\frac{12}{2}=6$

$x_2=\frac{8-4}{2}=\frac{4}{2}=2$

Ζητάμε τα x για τα οποία το τριώνυμο είναι θετικό δηλαδή ομόσημο του α=1>0, το οποίο όπως γνωρίζουμε συμβαίνει για τα x εκτός των ριζών, οπότε:

$x^2-8x+12>0\Leftrightarrow x<2$ ή $x>6\Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(6,+\infty)$.