ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\log_\alpha f(x)=\log_\alpha g(x) \overset{\text{επειδή η συνάρτηση } \log_\alpha x \text{ είναι 1-1}}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)$$ (με $0<\alpha\neq 1$ και $f(x),\ g(x)>0$)

SOS. Σκοπός μας είναι να πετύχουμε να έχουμε έναν λογάριθμο στο 1ο μέλος και έναν στο 2ο μέλος.

Μετά, βάση της ιδιότητας ότι η λογαριθμική συνάρτηση είναι 1-1 (απλώς το γράφετε), οι λογάριθμοι φεύγουν και καταλήγετε σε μια άλλη απλούστερη εξίσωση που λύνουμε κατά τα γνωστά.

Πως όμως θα πετύχουμε να έχουμε μόνο έναν λογάριθμο σε κάθε μέλος;

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων .

Α5 *(με κάποιες αλλαγές)* Να λυθούν οι εξισώσεις *(Υπόδειξη: Πρώτα να κάνετε περιορισμούς. .Η* $\log_\alpha f(x)$ *ορίζεται για* $f(x)>0$ *)*

i) $\log(x+1)+\log(x-1)=\log 18-2\log 3$ *(Απάντηση:* $x=\sqrt{3}$ *)*

Περιορισμοί:

$$\left.\begin{array}{l} x+1>0 \\ x-1>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x>-1 \\ x>1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x>1$$

Εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων έχουμε:

$$\log 18-2\log 3=\log 18-\log 3^2=\log 18-\log 9=\log\frac{18}{9}=\log 2$$

Αρα με τον περιορισμό $x>1$ έχουμε:

$$\log(x+1)+\log(x-1)=\log 18-2\log 3 \Leftrightarrow \log\left[(x+1)(x-1)\right]=\log 2 \overset{\text{Η συνάρτηση logx είναι 1-1}}{\Leftrightarrow} (x+1)(x-1)=2 \Leftrightarrow x^2-1=2 \Leftrightarrow$$

$$x^2=3 \Leftrightarrow x=\sqrt{3} \text{ ή } x=-\sqrt{3}$$

Δεκτή είναι μόνο η ρίζα $x=\sqrt{3}$.

ii) $\log(x-1)+\log x = 1-\log 5$ *(Απάντηση:x=2)*

Περιορισμοί:

$$\left.\begin{array}{l} x-1>0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x>1 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x>1$$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$\log(x-1)+\log x = 1-\log 5 \Leftrightarrow \log\left[x(x-1)\right] = \log 10 - \log 5 \Leftrightarrow \log\left(x^2-x\right) = \log\frac{10}{5} \Leftrightarrow \log\left(x^2-x\right) = \log 2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-x=2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$$

Εχει ρίζες $x=-1$ ή $x=2$

Δεκτή είναι μόνο η ρίζα $x=2$.

iii) $\log x^2 = (\log x)^2$ *(Απάντηση:x=1 ή x=100)*

Λύση:

Περιορισμοί:

$$\left.\begin{array}{l} x^2>0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\neq 0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x>0$$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$\log x^2 = (\log x)^2 \Leftrightarrow 2\log x = (\log x)^2 \Leftrightarrow (\log x)^2 - 2\log x = 0 \Leftrightarrow \log x(\log x - 2) = 0$$

$$\log x = 0 \text{ ή } \log x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 \text{ ή } \log x = 2 \overset{\textit{Ορισμός} \text{ (δεκαδικού) λογαρίθμου}}{\Leftrightarrow} x = 10^0 \text{ ή } x = 10^2$$

$$x = 10^0 \text{ ή } x = 10^2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 100$$

iv) $\log\left(x^2+1\right) - \log x = \log 2$ *(Απάντηση:x=1)*

Λύση:

Είναι $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $x^2+1 \geq 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως από το $\log\left(x^2+1\right)$ δεν έχουμε περιορισμούς και μόνο από τον όρο $\log x$ παίρνουμε ότι πρέπει $x>0$.Με αυτόν τον περιορισμό:

$$\log\left(x^2+1\right) - \log x = \log 2 \Leftrightarrow \log\left(x^2+1\right) - \log x = \log 2 \Leftrightarrow \log\frac{x^2+1}{x} = \log 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2+1 = 2x$$

$$x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ δεκτή.}$$

A6. Να λυθούν οι εξισώσεις : *(SOS ένας ιδιαίτερος τύπος άσκησης) Υπόδειξη: «Λογαριθμείστε» και τα δύο μέλη)*

i) $5^x = 2^{1-x}$ *(Απάντηση:x=log2)*

Λύση

$$5^x = 2^{1-x} \Leftrightarrow \log 5^x = \log 2^{1-x} \Leftrightarrow x\log 5 = (1-x)\log 2 \Leftrightarrow x\log 5 = \log 2 - x\log 2 \Leftrightarrow x\log 5 + x\log 2 = \log 2$$

$$x(\log 5 + \log 2) = \log 2 \Leftrightarrow x\log(2\cdot 5) = \log 2 \Leftrightarrow x\log 10 = \log 2 \overset{\log 10=1}{\Leftrightarrow} x\cdot 1 = \log 2 \Leftrightarrow x = \log 2$$

ii) $3^{x-1} = 2^{x+1}$ *(Απάντηση: $x = \frac{\log 6}{\log 1,5} \simeq 4,41902$)*

Λύση:

$$3^{x-1} = 2^{x+1} \Leftrightarrow \log 3^{x-1} = \log 2^{x+1} \Leftrightarrow (x-1)\log 3 = (x+1)\log 2 \Leftrightarrow x\log 3 - \log 3 = x\log 2 + \log 2$$

$$x\log 3 - x\log 2 = \log 2 + \log 3 \Leftrightarrow x(\log 3 - \log 2) = \log(2\cdot 3) \Leftrightarrow x\log\frac{3}{2} = \log 6 \Leftrightarrow x\log 1,5 = \log 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log 6}{\log 1,5}$$

B7. Να λύσετε τα συστήματα *(Υπόδειξη:Κι εδώ μην ξεχνάμε τους περιορισμούς)*

ii) $\begin{cases} xy = 8 \\ \log y = 2\log x \end{cases}$ *(Απάντηση:x=2 και y=4)*

Το σύστημα ορίζεται για

$\begin{cases} xy = 8 \\ \log y = 2\log x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 8 \\ \log y = \log x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 8 \\ y = x^2 \end{cases}$ δείτε την συνέχεια στο λυσάρι

iii) $\begin{cases} y = 2x \\ 2\log y = \log x + \log 2 \end{cases}$ *(Απάντηση:x=1/2 και y=1)*

δείτε την λύση στο λυσάρι