

## Ενας ενδιαφέρον τύπος άσκησης

Να λυθεί η εξίσωση:

$$x^{\log 3} + 3^{\log x} = 18$$

**Λύση:**

**Σκέψη:** • Εδώ αρχικά το μυαλό παει στο να λογαριθμήσουμε τα δύο μέλη αλλά δυστυχώς δεν υπάρχει ιδιότητα για τον λογάριθμο άθροισματος (μόνο γινομένου).

Πώς θα μπορούσαμε να παραγοντοποιήσουμε το άθροισμα;

$$x^{\log 3} + 3^{\log x} = 18 \Leftrightarrow x^{\log 3} \left( 1 + \frac{3^{\log x}}{x^{\log 3}} \right) = 18. \text{ Πάλι όμως εδώ έχουμε ένα άθροισμα μέσα στην παρένθεση κι έτσι}$$

ουσιαστικά έχουμε το ίδιο πρόβλημα με άλλη μορφή.

• Εκτός όμως από παραγοντοποίηση θυμόμαστε ότι το άθροισμα ίδιων προσθεταίων γράφεται ως γινόμενο:

$$\text{για παράδειγμα: } a+a+a=3a$$

Ετσι εξετάζουμε μήπως οι προσθεταίοι είναι ίσοι: Αν δύο αριθμοί έχουν ίσους λογαρίθμους τότε είναι ίσοι και αντίστροφα οπότε εξετάζουμε αν είναι ίσοι οι λογάριθμοι των προσθεταίων του 1<sup>ου</sup> μέλους της εξίσωσης

$$\log(x^{\log 3}) = \log 3 \log x \quad (1)$$

$$\log(3^{\log x}) = \log x \log 3 \quad (2)$$

Αφού στον πολλαπλασιασμό δεν παίζει ρόλο η σειρά των παραγόντων τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα οπότε και τα πρώτα δηλαδή έχουμε:

$$\log(x^{\log 3}) = \log(3^{\log x}) \Leftrightarrow x^{\log 3} = 3^{\log x} \text{ (Αν δύο αριθμοί έχουν ίσους λογαρίθμους τότε είναι ίσοι και αντίστροφα)}$$

Ετσι η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$x^{\log 3} + 3^{\log x} = 18 \Leftrightarrow x^{\log 3} + x^{\log 3} = 18 \Leftrightarrow 2x^{\log 3} = 18 \Leftrightarrow x^{\log 3} = 9 \Leftrightarrow \log(x^{\log 3}) = \log 3^2 \Leftrightarrow$$

$$\log 3 \cdot \log x = 2 \log 3 \Leftrightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100$$