

Να λυθεί η εξίσωση: (Παράδειγμα σχολικού) (Απ:  $x = -1$ )

$$x^2 + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{2x^2-x} = 0$$

**Λύση:**

**1ο βήμα:** Παραγοντοποιώ τους παρονομαστές (αν παραγοντοποιούνται)

- $2x^2 - x = x(2x - 1)$ . Άρα η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:  $x^2 + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x(2x-1)} = 0$

**2<sup>ο</sup> βήμα** Βρίσκω το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των παρονομαστών παίρνοντας όλους τους διαφορετικούς παράγοντες που εμφανίζονται στον μεγαλύτερο εκθέτη που εμφανίζονται. Για παράδειγμα αν σε έναν παρονομαστή υπάρχει παράγοντας το  $x$  και σε έναν άλλο το  $x^2$  παίρνουμε το  $x^2$ . (προσοχή! δεν παίρνουμε το  $x \cdot x^2$ )

- $\text{ΕΚΠ} = x(2x - 1)$

**3<sup>ο</sup> βήμα:** Κάνω τους περιορισμούς απαιτώντας όλοι οι παράγοντες που εμφανίζονται στους παρονομαστές να είναι διαφορετικοί από το 0.

- Η εξίσωση ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με  $x \neq 0$  και  $x \neq \frac{1}{2}$

**4<sup>ο</sup> βήμα:** Γράφω την τυποποιημένη φράση «Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:»

*Η φράση αυτή μας καλύπτει ώστε να γράψουμε το σύμβολο της ισοδυναμίας μεταξύ της μορφής της εξίσωσης με παρονομαστές και αυτής όπου έχουμε κάνει απαλοιφή παρονομαστών.*

**5<sup>ο</sup> βήμα :** Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της εξίσωσης με το ΕΚΠ των παρονομαστών και κάνουμε απλοποιήσεις ώστε να πετύχουμε απαλοιφή των παρονομαστών.

**6<sup>ο</sup> βήμα:** Κάνουμε επιμεριστική ιδιότητα και αναγωγή ομοίων όρων, και φέρνουμε όλους τους παράγοντες στο 1<sup>ο</sup> μέλος οπότε καταλήγουμε σε πολυωνυμική εξίσωση που λύνουμε κατά τα γνωστά.

**7<sup>ο</sup> βήμα:** Ελέγχουμε αν κάποια από τις ρίζες που βρήκαμε απορρίπτεται λόγω των περιορισμών

• Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$x^2 + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x(2x-1)} = 0 \Leftrightarrow x(2x-1)x^2 + x(2x-1)\frac{2}{2x-1} - x(2x-1)\frac{1}{x(2x-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x-1)x^3 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)x^3 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^4 - x^3 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3(2x-1) + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x-1)(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ ή } x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \text{ ή } x^3 = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = -\sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = -1$$

Λόγω των περιορισμών δεκτή είναι μόνο η  $x = -1$

**A1 i)** Να λυθεί η εξίσωση:  $\frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x^2-x} = \frac{x^2-3x+2}{x}$

(Απ:  $x = -3$ )

**Λύση:**

$x^2 - x = x(x-1)$ . Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x(x-1)} = \frac{x^2-3x+2}{x}$$

• Η εξίσωση ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με  $x \neq 0$  και  $x \neq 1$

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:»

$$\frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x(x-1)} = \frac{x^2-3x+2}{x} \Leftrightarrow x(x-1) \frac{3x^2-1}{x-1} - x(x-1) \frac{2}{x(x-1)} = x(x-1) \frac{x^2-3x+2}{x}$$

$$\Leftrightarrow x(3x^2-1) - 2 = (x-1)(x^2-3x+2) \Leftrightarrow 3x^3 - x - 2 = x^3 - 3x^2 + 2x - x^2 + 3x - 2$$

$$3x^3 - x - 2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \Leftrightarrow 3x^3 - x^3 + 4x^2 - x - 5x - 2 + 2 = 0$$

$$2x^3 + 4x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \quad (\text{αφού } x \neq 0)$$

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -3$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad (\text{απορρίπτεται λόγω περιορισμού})$$

Άρα μοναδική ρίζα της δοθείσας εξίσωσης είναι η  $x = -3$ .

**A1 ii)** Να λυθεί η εξίσωση:  $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$

(Απ:  $x = -\sqrt{2}$  ή  $x = \sqrt{2}$ )

**Λύση:**

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ . Άρα η εξίσωση γίνεται:  $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)}$

• Η εξίσωση ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με  $x \neq -1$  και  $x \neq 1$

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \frac{x^2}{x-1} - (x-1)(x+1) \frac{2}{x+1} = (x-1)(x+1) \frac{4}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)x^2 - 2(x-1) = 4 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x + 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) - 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ ή } x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$x = -1 \text{ ή } x = -\sqrt{2} \text{ ή } x = \sqrt{2}. \text{ Από αυτές δεκτές είναι μόνο οι } -\sqrt{2}, \sqrt{2} \text{ αφού } x \neq -1.$$