3ο φυλλάδιο Εξισώσεις με ριζικά ΛΥΣΕΙΣ (version 12-3-2016)

Σημείωση: Δίνεται η εξίσωση $x=2$.Εχει μια λύση την $x=2$.Αν υψώσω και τα δύο μέλη στο τετράγωνο παίρνω $x^2=2^2 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι υψώνοντας στο τετράγωνο μια εξίσωση δεν παίρνουμε πάντα ισοδύναμη εξίσωση (δηλαδή εξίσωση που να έχει τις ίδιες λύσεις με την αρχική).

♦ Να λυθούν οι εξίσωσεις

$\sqrt{x}=x-2$ *(Απ:4)*

$\sqrt{2x+7}-x=2$ *(Απ:1)*

$\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1$ *(Απ:5)*

Λύση:

● Η εξίσωση ορίζεται για $x\geq 0$.*Γι αυτά τα x διαδοχικά έχουμε:*

$\sqrt{x}=x-2$ (Το ριζικό είναι ήδη απομονωμένο

$\left(\sqrt{x}\right)^2=(x-2)^2$ (υψώνουμε στο τετράγωνο)

$x=x^2-4x+4$ // $x^2-4x+4=x$ // $x^2-4x-x+4=0$ // $x^2-5x+4=0$

$\alpha=1,\quad \beta=-5,\quad \gamma=4$ // $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4=25-16=9$

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\dfrac{5\pm 3}{2}$ $x_1=\dfrac{8}{2}=4$ και $x_2=\dfrac{2}{2}=1$

Οι τιμές αυτές του x, αν και ικανοποιούν τον περιορισμό $x\geq 0$ δεν είναι και οι δύο ρίζες της αρχικής εξίσωσης.

Πράγματι αν θέσουμε τις τιμές αυτές στην αρχική εξίσωση, παίρνουμε:

Για x=4: $\sqrt{4}=4-2$ που είναι αληθής ισότητα

Για x=1: $\sqrt{1}=1-2$ που δεν είναι αληθής ισότητα

Αρα η αρχική εξίσωση έχει ως μοναδική ρίζα την x=4.

● Η εξίσωση ορίζεται για $2x+7\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{7}{2}$. *Γι αυτά τα x διαδοχικά έχουμε:*

$\sqrt{2x+7}=x+2$ *(απομονώνουμε το ριζικό)*

$\left(\sqrt{2x+7}\right)^2=(x+2)^2$ *(υψώνουμε στο τετράγωνο)*

εδώ είναι που δεν έχουμε ισοδυναμία και παρεισφραίνει μια ρίζα (η 4) που στο τέλος απορρίπτουμε

$2x+7=x^2+4x+4$ // $x^2+4x+4=2x+7$ // $x^2+4x-2x+4-7=0$ // $x^2+2x-3=0$

$\alpha=1,\quad \beta=2,\quad \gamma=-3$ // $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot 1\cdot 4=25-16=9$

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\dfrac{5\pm 3}{2}$ $x_1=\dfrac{8}{2}=4$ $x_2=\dfrac{2}{2}=1$

Αν θέσουμε τις τιμές αυτές στην αρχική εξίσωση, παίρνουμε:

- Για x=4: $\sqrt{2\cdot 4+7}=4+2 \Leftrightarrow \sqrt{8+7}=6 \Leftrightarrow \sqrt{15}=6$ που δεν είναι αληθής ισότητα
- Για x=1: $\sqrt{2\cdot 1+7}=1+2 \Leftrightarrow \sqrt{2+7}=3 \Leftrightarrow \sqrt{9}=3$ $\sqrt{1}=1-2$ που είναι αληθής ισότητα

Αρα η αρχική εξίσωση έχει ως μοναδική ρίζα την x=1.

• Η εξίσωση ορίζεται για $\left.\begin{matrix} 2x+6\geq 0 \\ x+4\geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x\geq -6 \\ x\geq -4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x\geq -3 \\ x\geq -4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x\geq -3$

Γι αυτά τα x διαδοχικά έχουμε:

$\sqrt{2x+6}=1+\sqrt{x+4}$ (απομονώνουμε το ριζικό) // $\left(\sqrt{2x+6}\right)^2=\left(1+\sqrt{x+4}\right)^2$ *(υψώνουμε στο τετράγωνο)*

$2x+6=1+2\sqrt{x+4}+\left(\sqrt{x+4}\right)^2$ // $2x+6=1+2\sqrt{x+4}+x+4$ *(απομονώνουμε το ριζικό)*

$x+1=2\sqrt{x+4}$ *(υψώνουμε στο τετράγωνο)*

εδώ είναι που δεν έχουμε ισοδυναμία και παρεισφραίνει μια ρίζα (η -3) που στο τέλος απορρίπτουμε

$(x+1)^2=\left[2\sqrt{x+4}\right]^2$ // $x^2+2x+1=2^2\left(\sqrt{x+4}\right)^2$ // $x^2+2x+1=4(x+4)$ // $x^2+2x+1=4x+16$

// $x^2-2x-15=0$ //

$\alpha=1,\quad \beta=-2,\quad \gamma=-15$ // $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-15)=4+60=64$

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\dfrac{2\pm 8}{2}\qquad x_1=\dfrac{-6}{2}=-3$ και $x_2=\dfrac{10}{2}=5$

Αν θέσουμε τις τιμές αυτές στην αρχική εξίσωση, παίρνουμε:

- Για x=-3: $\sqrt{2(-3)+6}-\sqrt{(-3)+4}=1 \Leftrightarrow \sqrt{-6+6}-\sqrt{1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{0}-1=1 \Leftrightarrow -1=1$ που δεν είναι αληθής ισότητα
- Για x=5: $\sqrt{2\cdot 5+6}-\sqrt{5+4}=1 \Leftrightarrow \sqrt{10+6}-\sqrt{9}=1 \Leftrightarrow \sqrt{16}-3=1 \Leftrightarrow 4-3=1$ που είναι αληθής ισότητα

Αρα η αρχική εξίσωση έχει ως μοναδική ρίζα την x=5.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

1 βήμα: Κάνουμε τους περιορισμούς. Εδώ μπορεί να μην έχουμε παρονομαστές αλλά έχουμε ρίζα οπότε απαιτούμε η υπόριζη παράσταση να είναι ≥ 0.

● Η εξίσωση ορίζεται για ……….

2 βήμα: Γράφουμε την φράση « *Γι αυτά τα x διαδοχικά έχουμε:*»

Προσοχή!!! *Παρατηρείστε ότι το σχολικό δεν συνδέει τα βήματα λύσης της εξίσωσης με το σύμβολο της ισοδυναμίας* $\Leftrightarrow$.

3 βήμα: Φροντίζουμε ώστε το ριζικό να βρίσκεται μόνο του σε κάποιο μέλος («απομονώνουμε» το ριζικό)

4 βήμα: Υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο ώστε να απαλλαγούμε από την ρίζα.

Σημείωση: Αν έχουμε **δύο ριζικά** απομονώνουμε το ένα και υψώνουμε στο τετράγωνο.Ετσι όμως ίσως παραμείνει κάποιο ριζικό που θα χρειαστεί να απομονώσουμε και να ξανα-υψώσουμε στο τετράγωνο.

5 βήμα: Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση που προκύπτει.

6 βήμα: Απορρίπτουμε τις ρίζες που δεν ικανοποιούν τους αρχικούς περιορισμούς.

7 βήμα: **(SOS)** Βάζουμε τις ρίζες που βρήκαμε στην αρχική εξίσωση και ελέγχουμε αν την επαληθεύουν δηλαδή αν παίρνουμε αληθή ισότητα.Οσες δεν την επαληθεύουν τις απορρίπτουμε.Αυτό το κάνουμε γιατί υψώνοντας στο τετράγωνο ίσως «προσθέσαμε» επιπλέον ρίζες που δεν είναι ρίζες της αρχικής εξίσωσης.