4.2 Διαίρεση πολυωνύμων-1ο φυλλάδιο

Αλγοριθμική διαίρεση

Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο την έννοια της Ευκλείδειας ή αλγοριθμικής διαίρεσης μεταξύ θετικών **ακεραίων** αριθμών.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline \end{array}$$

13 = 5...

Γενικεύοντας έχουμε ότι:

Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών Δ και δ με $\delta \neq 0$, υπάρχουν δύο μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π και υ, τέτοιοι ώστε

$\Delta = \delta\pi + \upsilon, \qquad 0 \leq \upsilon < \delta$ **(1)**

Η ισότητα αυτή είναι γνωστή ως **ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης**.

Ο **Δ** λέγεται **διαιρετέος**, ο **δ διαιρέτης**, ο **π πηλίκο** και ο **υ υπόλοιπο** της διαίρεσης.

►Η έννοια της **διαίρεσης των πολυωνύμων** είναι ανάλογη με την Ευκλείδεια διαίρεση που αναφέραμε παραπάνω. Συγκεκριμένα ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Ταυτότητα της διαίρεσης) Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x) με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δυο **μοναδικά** πολυώνυμα π(x) και υ(x), τέτοια ώστε:

Δ(x) = **(2)**

όπου το υ(x) ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο **ή** έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).

Όπως και στη διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών το Δ(x) λέγεται **διαιρετέος**, το δ(x) **διαιρέτης**, το π(x) πηλίκο και το υ(x) **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

►Για να προσδιορίσουμε το πηλίκο π(x) και το υπόλοιπο υ(x) της διαίρεσης ενός πολυωνύμου Δ(x) με ένα πολυώνυμο δ(x), ακολουθούμε μια διαδικασία, ανάλογη με εκείνη της διαίρεσης των θετικών ακεραίων.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί περιγράφεται βήμα προς βήμα η διαδικασία της διαίρεσης του πολυωνύμου $x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ με το πολυώνυμο $x - 3$.

1. Κάνουμε το σχήμα της διαίρεσης και γράφουμε τα δύο πολυώνυμα.

2. Βρίσκουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου διαιρώντας τον πρώτο όρο του διαιρετέου (x^3) με τον πρώτο όρο του διαιρέτη (x) : $\frac{x^3}{x} = ...$ (εδώ είναι χρήσιμη η ιδιότητα των δυνάμεων $\frac{x^\nu}{x^\mu} = x^{\nu-\mu}$)

3. Πολλαπλασιάζουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου …. με τον διαιρέτη (x-3) και το γινόμενο το αφαιρούμε από το διαιρετέο.

Βρίσκουμε έτσι το πρώτο **μερικό υπόλοιπο**.

4. Επαναλαμβάνουμε διαδοχικά τα βήματα **2** και **3** με νέο διαιρετέο το προηγούμενο μερικό υπόλοιπο. έως ότου το υπόλοιπο είναι 0 **ή** ο βαθμός του είναι μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη.

$x^3 - 5x^2 + 2x - 1$	$x - 3$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα:

$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = (x - 3)\cdot....$

(διαιρετέος) = (διαιρέτης) · (πηλίκο) + (υπόλοιπο)

που εκφράζει την ταυτότητα της διαίρεσης.

►Ας ακολουθήσουμε την παραπάνω διαδικασία για τα πολυώνυμα $4x^4 + x^2 - 3x - 1$ και $2x^2 + x$:

Προσοχή! για να έχουμε χώρο, **συμπληρώνουμε** την δύναμη του x^3 που λείπει με συντελεστή **0** ή *απλά αφήνουμε ένα κενό διάστημα:*

$4x^4 + 0x^3 + x^2 - 3x - 1$	$2x^2 + x$
	-

Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα: $4x^4 + x^2 - 3x – 1=(2x^2 + x)\cdot....$