1. Δίνεται το πολυώνυμο

$P(x)=2x^3+(\alpha+\beta)x^2+(2\alpha+5\beta)x+3$

Για το οποίο γνωρίζουμε ότι το $x+1$ είναι παράγοντάς του και ότι διαιρούμενο με το $x-2$ έχει υπόλοιπο υ=-9.

A) Να βρεθούν τα α και β

B) Αν α=-7 και β-2 να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

ΛΥΣΗ

Αφού το $x+1=x-(-1)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου από την θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow 2(-1)^3+(\alpha+\beta)(-1)^2+(2\alpha+5\beta)(-1)+3=0 \Leftrightarrow 2(-1)+(\alpha+\beta)\cdot 1-2\alpha-5\beta+3=0 \Leftrightarrow$$

$$-2+\alpha+\beta-2\alpha-5\beta+3=0 \Leftrightarrow -\alpha-4\beta+1=0 \Leftrightarrow -\alpha-4\beta=-1 \Leftrightarrow \alpha+4\beta=1$$

Γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με ένα πολυώνυμο της μορφής $x-\rho$ είναι το $P(\rho)$. Οποτε:

$$P(2)=-9 \Leftrightarrow 2\cdot 2^3+(\alpha+\beta)2^2+(2\alpha+5\beta)2+3=-9 \Leftrightarrow 2\cdot 8+(\alpha+\beta)\cdot 4+4\alpha+10\beta+3=-9 \Leftrightarrow$$

$$16+4\alpha+4\beta+4\alpha+10\beta+3=-9 \Leftrightarrow 8\alpha+14\beta=-16-3-9 \Leftrightarrow 8\alpha+14\beta=-28 \Leftrightarrow 4\alpha+7\beta=-14$$

Λύνουμε πλέον το σύστημα

$$\begin{cases}\alpha+4\beta=1\\4\alpha+7\beta=-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-4\beta\\4(1-4\beta)+7\beta=-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-4\beta\\4-16\beta+7\beta=-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-4\beta\\-9\beta=-14-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-4\beta\\-9\beta=-18\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-4\beta\\9\beta=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-4\beta\\\frac{9\beta}{9}=\frac{18}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-4\cdot 2\\\beta=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-7\\\beta=2\end{cases}$$

B) Αν α=-7 και $\beta=2$ το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+(\alpha+\beta)x^2+(2\alpha+5\beta)x+3$ επειδή:

$\alpha+\beta=-7+2=-5$

$2\alpha+5\beta=2(-7)+5\cdot 2=-14+10=-4$

γίνεται:

$P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$ επομένως $P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-5x^2-4x+3=0$

Επειδή η εξίσωση είναι τρίτου βαθμού προσπαθώ να παραγοντοποιήσω το 1^o μέλος

Επειδή το πολυώνυμο έχει ακέραιους συντελεστές, από το θεώρημα ακέραιων ριζών οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτης του σταθερού όρου 3 δηλαδή οι ± 1 και ± 3.

Με σχήμα Horner προσπαθώ διαδοχικά να εξακριβώσω αν κάποιες από αυτές είναι ρίζα.

2	-5	-4	3	1
↓	2	-3	-7	
2	-3	-7	-4	

Αρα ο 1 δεν είναι ρίζα.

2	-5	-4	3	-1
↓	-2	+7	-3	
2	-7	+3	0	

Αρα το -1 είναι ρίζα και το $P(x)=(x-1)(2x^2-7x+3)$ και η εξίσωση γίνεται

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2-7x+3)=0$

Απομένει να λύσω πλέον την

$2x^2-7x+3=0$ για να βρώ και τις υπόλοιπες ρίζες.

$\alpha=2$, $\beta=-7$ $\gamma=3$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-7)^2-4\cdot 2\cdot 3=49-24=25$

$$x_{2,3}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm 5}{4}$$

Οπότε

$$x_2=\frac{12}{4}=3$$

$$x_3=\frac{7-5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Αρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1=-1$ $x_2=3$ $x_3=\frac{1}{2}$

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}\right)$$

α. Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=2\ln 2$

γ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x)>0$

ΛΥΣΗ:

α. Η παράσταση $e^{x}+5$ είναι θετική αφού $e^{x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $e^{x}+5>5>0$

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}>0\Leftrightarrow e^{2x}-1>0\Leftrightarrow e^{2x}>1\Leftrightarrow e^{2x}>e^{0}\Leftrightarrow 2x>0\Leftrightarrow x>0$$

Αρα το πεδίο ορισμού είναι το $A=(0,+\infty)$

β. $f(x)=2\ln 2\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}\right)=2\ln 2\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}\right)=\ln 2^{2}\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}\right)=\ln 4$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}=4\Leftrightarrow e^{2x}-1=4\left(e^{x}+5\right)\Leftrightarrow e^{2x}-1=4e^{x}+20\Leftrightarrow e^{2x}-4e^{x}-21=0$$

$$\left(e^{x}\right)^{2}-4e^{x}-21=0$$

Θέτω :

$e^{x}=\omega$.Αφού $e^{x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι και ω>0

Αρα η (1) γίνεται

$$\omega^{2}-4\omega-21=0$$

$\alpha=1$, $\beta=-4$ $\gamma=-21$

$$\Delta=\beta^{2}-4\alpha\gamma=(-4)^{2}-4\cdot 1\cdot(-21)=16+84=100$$

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4\pm\sqrt{100}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 10}{2}$$

Οπότε

$$\omega_{1}=\frac{14}{2}=7$$

$\omega_{2}=\frac{4-10}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ απορρίπτεται

Αρα τελικά $e^{x}=7\Leftrightarrow x=\ln 7$

γ. $f(x)>0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)>0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)>\ln 1 \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}>1$

Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $e^x+5>5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με το e^x+5 και τα δύο μέλη της ανίσωσης και η φορά της διατηρείται.

$$e^x+5\cdot\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}>1\cdot\left(e^x+5\right)\Leftrightarrow e^{2x}-1>e^x+5\Leftrightarrow e^{2x}-e^x-6>0\Leftrightarrow\left(e^x\right)^2-e^x-6>0$$

Θέτω :

$e^x=\omega$.Αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι και ω>0

$\omega^2-\omega-6>0$

$\alpha=1$, $\beta=-1$ $\gamma=-6$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-1\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-6\right)=1+24=25$

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{1\pm5}{2}$$

Οπότε

$\omega_1=\dfrac{6}{2}=3$

$\omega_2=\dfrac{1-5}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2$ απορρίπτεται

Το τριώνυμο $\omega^2-\omega-6$ έχει δύο ρίζες τις -2 και 3 και ζητάμε για ποιά ω είναι θετικό, δηλαδή ομόσημο του α=1.Από την θεωρία της Α Λυκείου γνωρίζουμε ότι αυτό γίνεται για ω εκτός των ριζών.Επειδή όμως το ω είναι θετικός παίρνουμε μόνο:

$\omega>3\Leftrightarrow e^x>3\Leftrightarrow\ln\left(e^x\right)>\ln3\Leftrightarrow x>\ln3$

3. Δίνεται η συνάρτηση

$f(x)=\log(x+4)-3$

α) Να βρεθεί το Π.Ο

β) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράσταση C_f με τους άξονες

γ) Αν $A(\kappa,-2)\in C_f$ να βρεθεί το κ.

α) Πρέπει $x+4>0 \Leftrightarrow x>-4$

Αρα Π.Ο.=$(-4,+\infty)$

β) ● Για να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής με τον άξονα $x'x$ θέτουμε:

$f(x)=0 \Leftrightarrow \log(x+4)-33=0 \Leftrightarrow \log(x+4)=3 \Leftrightarrow x+4=10^3 \Leftrightarrow x+4=1000 \Leftrightarrow x=1000-4 \Leftrightarrow x=996$

Αρα Α=$(996,\ 0)$

● Για να βρούμε την τεταγμένη του σημείου τομής με τον άξονα $y'y$ θέτουμε:

$f(0)=\log(0+4)-3=\log 4-3$

Αρα Β=$(0,\log 4-3)$

γ) Αφού $A(\kappa,-2)\in C_f$ θα είναι

$f(\kappa)=-2 \Leftrightarrow \log(\kappa+4)-3=-2 \Leftrightarrow \log(\kappa+4)=3-2 \Leftrightarrow \log(\kappa+4)=1 \Leftrightarrow \kappa+4=10 \Leftrightarrow \kappa=10-4 \Leftrightarrow \kappa=6$

δ) $f(3^{x+3})=\log(x+4)-3$

4. Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} \eta\mu(\pi+\theta)x + \sigma\upsilon\nu(-\theta)y = 1 \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)x - \eta\mu(\theta-\pi)y = 1 \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta,\ \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)$

β) Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 4$, τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $xy = f(\theta)$ έχει μοναδική λύση.

ΛΥΣΗ:

α) $\eta\mu(\pi+\theta) = -\eta\mu\theta$

$\sigma\upsilon\nu(-\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sigma\upsilon\nu\theta$

$\eta\mu(\theta-\pi) = \eta\mu[-(\pi-\theta)] = -\eta\mu(\pi-\theta) = -\eta\mu\theta$

Ετσι το σύστημα γράφεται πιο απλά:

$$\begin{cases} -\eta\mu\theta \mathbf{x} + \sigma\upsilon\nu\theta \mathbf{y} = 1 \\ \sigma\upsilon\nu\theta \mathbf{x} + \eta\mu\theta \mathbf{y} = 1 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} -\eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \\ \sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta \end{vmatrix} = -\eta\mu\theta\cdot\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = -\eta\mu^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta = -\left(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta\right) = -1 \neq 0$$

Αρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και υπολογίζουμε *(με την μέθοδο των οριζουσών)*

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & \sigma\upsilon\nu\theta \\ 1 & \eta\mu\theta \end{vmatrix} = \eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -\eta\mu\theta & 1 \\ \sigma\upsilon\nu\theta & 1 \end{vmatrix} = -\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta$$

Αρα $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta}{-1} = -\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$

$y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta}{-1} = \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$

β) $xy = f(\theta) \Leftrightarrow (-\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta) = 7\sigma\upsilon\nu\theta - 4 \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta) = 7\sigma\upsilon\nu\theta - 4 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta = 7\sigma\upsilon\nu\theta - 4 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta - \left(1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta\right) = 7\sigma\upsilon\nu\theta - 4 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta - 1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 7\sigma\upsilon\nu\theta - 4 \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 7\sigma\upsilon\nu\theta + 3 = 0$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu\theta = \omega$ οπότε η εξίσωση γίνεται:

$2\omega^2 - 7\omega + 3 = 0$

$\alpha = 2$, $\beta = -7$ $\gamma = 3$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$

$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 5}{4}$

Οπότε:

$\omega_1 = \frac{12}{4} = 3$

$\omega_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Επομένως έχουμε:

$\omega_1 = 3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = 3$ που είναι **αδύνατη** αφού γνωρίζουμε πως $-1 \le \sigma\upsilon\nu\theta \le 1$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

Επίσης $\omega_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $\theta = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}$ όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$