ΘΕΜΑΤΑ επιπέδου 2 Τράπεζας Θεμάτων *(σετ Ιανουαρίου 2015)*

22649

α) Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $P(x)=\left(x^3-6x^2+11x-2\right):(x-3)$ **(Μονάδες 10)**

β) Αν $P(x)=x^3-6x^2+11x+\lambda$ να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση $P(x):(x-3)$ να έχει υπόλοιπο 0.

(Μονάδες 15)

Λύση:

α) Εφαρμόζουμε θεώρημα Horner $P(x)=\left(x^3-6x^2+11x-2\right):(x-3)$

Συντελεστές του P(x) **ρ**

1	-6	11	-2	3
$\downarrow$	3	-18	-21	
1	-6	-7	-23	

Συντελεστές Πηλίκου **Υπόλοιπο**

Αρα το υπόλοιπο είναι υ=-23 και το πηλίκο είναι το $\pi(x)=x^2-6x-7$

β) Η διαίρεση $P(x):(x-3)$ έχει υπόλοιπο 0 **αν και μόνο αν** το $(x-3)$ είναι παράγοντας του $P(x)$

που σύμφωνα με γνωστό θεώρημα συμβαίνει αν και μόνο αν :

$$P(3)=0 \Leftrightarrow 3^3-6\cdot 3^2+11\cdot 3+\lambda=0 \Leftrightarrow 3^3-6\cdot 3^2+11\cdot 3+\lambda=0 \Leftrightarrow 27-6\cdot 9+33+\lambda=0 \Leftrightarrow$$

$$60-54+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-6.\ \text{Αρα}\ P(x)=x^3-6x^2+11x-6$$

Επαλήθευση:

1	-6	11	-6	1
$\downarrow$	1	-5	6	
1	-5	6	**0**	

22685

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=(\alpha^3+2)x^3+x^2+1$ και $Q(x)=3\alpha x^3+x^2+1$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το *α* ώστε τα πολυώνυμα *P*(*x*) και *Q*(*x*) να είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν *α* = 1, να αποδείξετε ότι η εξίσωση *P*(*x*) = 0 δεν έχει ακέραιες ρίζες. (Μονάδες 12)

Λύση:

α) $P(x)=(\alpha^3+2)x^3+x^2+1$

$Q(x)=3\alpha x^3+x^2+1$

Για να είναι ίσα πρέπει να έχουν ίσους όλους τους συντελεστές των ομοβάθμιων δυνάμεων του x οπότε:

$\alpha^3+2=3\alpha \Leftrightarrow \alpha^3-3\alpha+2=0$.

Αφού το $\alpha^3-3\alpha+2$ έχει ακέραιους συντελεστές οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου $+2$ δηλαδή ±1 και ±2.

Υπολογίζοντας με το μυαλό βλέπω ότι το α=1 είναι ρίζα, οπότε κάνω για αυτό σχήμα Horner.

<u>Προσοχή!</u> Δεν ξεχνάμε να βάλουμε 0 στην θέση του συντελεστή του όρου α^2 που δεν εμφανίζεται.

Συντελεστές του P(x)				**ρ**
1	0	-3	2	1
$\downarrow$	1	1	-2	
1	1	-2	**0**	

Συντελεστές Πηλίκο **Υπόλοιπο**

Αρα μια ρίζα είναι η $\alpha_1=1$ και οι άλλες, (άν υπάρχουν) θα είναι οι ρίζες της $\alpha^2+\alpha-2=0$.

$\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=-2$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9$

$$\alpha_{2,3}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}$$

$$\alpha_2=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$\alpha_3=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Αρα τα πολυώνυμα είναι ίσα για α=1 ή για α=-2.

β) Για α=1: $P(x) = 3x^3 + x^2 + 1$

Επειδή το $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές αν υπάρχουν ακέραιες ρίζες του αυτές θα διαιρούν τον σταθερό όρο 1 δηλαδή οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι ± 1.

Ομως $P(1) = 3 \cdot 1^3 + 1^2 + 1 = 3 + 1 + 1 = 5 \neq 0$

$P(-1) = 3 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -3 + 1 + 1 = -1 \neq 0$

Αρα δεν υπάρχουν ακέραιες ρίζες .

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x^2-4x+\lambda$

α) Αν $P(-1) = 6$, να δείξετε ότι $\lambda = 1$. (Μονάδες 11)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 14)

Λύση:

α) $P(-1)=6 \Leftrightarrow (-1)^3+2(-1)^2-4(-1)+\lambda=6 \Leftrightarrow -1+2+4+\lambda=6 \Leftrightarrow 5+\lambda=6 \Leftrightarrow \lambda=6-5 \Leftrightarrow \lambda=1$

$P(x)=0 \Leftrightarrow x^3+2x^2-4x+1=0$

Εχει ακέραιους συντελεστές άρα οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι ± 1

Συντελεστές του P(x) **ρ**

1	2	-4	1	1
↓	1	3	1	
1	3	-1	0	

Συντελεστές Πηλίκου **Υπόλοιπο**

$P(x)=(x-1)(x^2+3x-1)$

Αρα μια ρίζα είναι η $x_1=1$ και οι άλλες άν υπάρχουν θα είναι οι ρίζες της $x^2+3x-1=0$.

$\alpha=1,\ \beta=3,\ \gamma=-1$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=3^2-4\cdot1\cdot(-1)=9+4=13$

$$x_{2,3}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$

$$x_3=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$$

22687

Το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-1)x^4-2(\lambda-1)x^3+2\lambda x^2+\lambda+1$

είναι 3ου βαθμού.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = -1$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $P(x)$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις ρίζες του $P(x)$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Αφού είναι 3ου βαθμού πρέπει :

$$\left.\begin{array}{l}\lambda^2-1=0\\ \lambda-1\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda^2=1\\ \lambda\neq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda=\pm\sqrt{1}\\ \lambda\neq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda=\pm 1\\ \lambda\neq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lambda=-1$$

β) Για $\lambda=-1$ είναι:

$$P(x)=\left((-1)^2-1\right)x^4-2(-1-1)x^3+2(-1)x^2+(-1)+1=(1-1)x^4-2(-2)x^3-2x^2+0=$$

$$0\cdot x^4-4x^3-2x^2=-4x^3-2x^2$$

γ) $P(x)=-4x^3-2x^2=-2x^2(x+1)$

$$P(x)=0\Leftrightarrow -2x^2(x+1)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x+1=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-1$$

22688

Το πολυώνυμο P(x) αν διαιρεθεί με το (x – 2) δίνει πηλίκο (x^2 - 3x + 2) και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό υ.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης. (Μονάδες 8)

β) Αν P(1) = 10, να βρείτε το υ. (Μονάδες 9)

γ) Αν υ = 10, να βρείτε το P(x). (Μονάδες 8)

Λύση:

α) $\mathrm{P}(x)=(x-2)(x^2-3x+2)+\upsilon$

β) $\mathrm{P}(1)=10\Leftrightarrow(1-2)(1^2-3\cdot1+2)+\upsilon=10\Leftrightarrow-1(1-3+2)+\upsilon=10\Leftrightarrow-1\cdot0+\upsilon=10\Leftrightarrow\upsilon=10$

γ) Αν υ = 10, από το α) έχουμε:

$$\mathrm{P}(x)=(x-2)(x^2-3x+2)+10=x^3-3x^2+2x-2x^2+6x-4=x^3-5x^2+8x-4$$

ΑΠΟΡΙΑ: Λέει κάτι που μηδενίζει το πηλίκο ή τυχαίο είναι;

Να που στο γ) μας φανερώνει το αποτέλεσμα