1ο φυλλάδιο Αρτιες περιττές συναρτήσεις **ΛΥΣΕΙΣ** *(version 5-11-2016)*

Προεργασία:

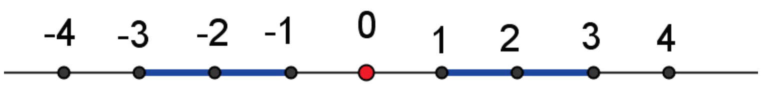
• $(-x)^4 = x^4$, $(-x)^6 = x^6$, $(-x)^3 = -x^3$, $(-x)^5 = -x^5$ $|-x| = |x|$,

$|-x-1| = |x+1|$, $|-x+1| = |x-1|$

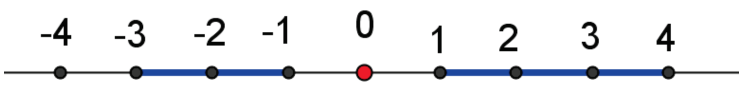
• Αν $f(x) = 3x^2 + 5x$ να υπολογίσετε τα:

- $f(2x) = 3(2x)^2 + 5(2x) = 3\cdot 4x^2 + 10x = 12x^2 + 10x$
- $f(x+1) = 3(x+1)^2 + 5(x+1) = 3(x^2+2x+1) + 5(x+1) = 3x^2 + 6x + 3 + 5x + 5 = 3x^2 + 11x + 8$
- $f(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)$

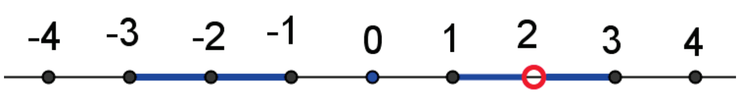
• Εξετάστε ποιό από τα παρακάτω σύνολα είναι συμμετρικά ως προς το 0:



▪ Το σύνολο $\mathrm{A} = [-3,-1] \cup [1,3]$ **είναι** συμμετρικό ως προς 0 γιατί για κάθε $x \in \mathrm{A}$ είναι και $-x \in \mathrm{A}$.



Το σύνολο $\mathrm{B} = [-3,-1] \cup [1,4]$ **δεν είναι** συμμετρικό ως προς 0 γιατί ενώ $x = 4 \in \mathrm{B}$, $-4 \notin \mathrm{B}$.



Το σύνολο $\Gamma = [-3,-1] \cup [1,2) \cup (2,3]$ **δεν είναι** συμμετρικό ως προς 0 γιατί ενώ $x = -2 \in \Gamma$,

$-(-2) = 2 \notin \Gamma$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **άρτια**, όταν **για κάθε** x∈Α ισχύει:

i) -x∈Α και

ii) f(-x) = f(x)

• Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y 'y

Παράδειγμα:

Δείξτε ότι η $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ είναι άρτια

SOS:Και στην άρτια και στην περιττή το πεδίο ορισμού πρέπει να είναι **συμμετρικό ως προς 0**

Λύση:

ii) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Αρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$. *(δηλαδή η πρώτη συνθήκη του ορισμού ικανοποιείται)*

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 + 1 = 2x^4 - x^2 + 1 = f(x)$

Αρα η f είναι άρτια.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε x∈A ισχύει:

i) -x∈A και

ii) $f(-x) = -f(x)$

● Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα:

Δείξτε ότι η $f(x) = 2x^3 - x$ είναι περιττή.

Λύση:

ii) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Αρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$. *(δηλαδή η πρώτη συνθήκη του ορισμού ικανοποιείται)*

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = 2(-x^3) + x = -2x^3 + x = -(2x^3 - x) = -f(x)$

Αρα η f είναι περιττή.

● Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας **άρτιας** συνάρτησης ***f*** που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [-6,6].

Να χαραχθούν και τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής:

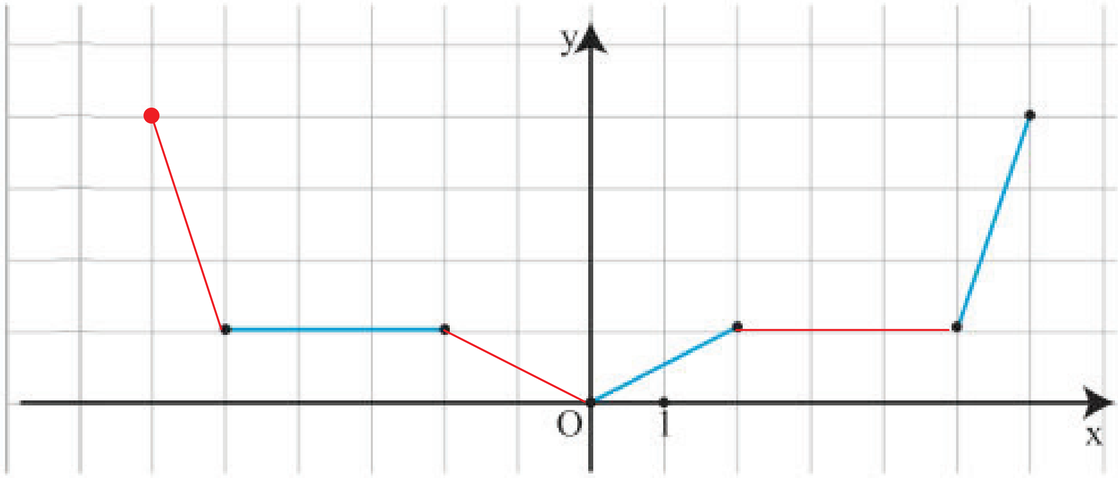
α) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f:

i) είναι γνησίως αύξουσα,

ii) είναι γνησίως φθίνουσα

iii) είναι σταθερή.

β) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f, καθώς επίσης οι θέσεις των ακροτάτων αυτών.



y
O
1
x

4. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:

i) $f_1(x)=3x^2+5x^4$	**ii)** $f_2(x)=3\|x\|+1$	**iii)** $f_3(x)=\|x+1\|$
iv) $f_4(x)=x^3-3x^5$	**v)** $f_5(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$	**vi)** $f_6(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Λύση:

i) Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f_1(-x)=3(-x)^2+5(-x)^4=3x^2+5x^4=f_1(x)$$

Αρα η f_1 είναι άρτια.

ii) Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f_2(-x)=3|-x|+1=3|x|+1=f_2(x)$$

Αρα η f_2 είναι άρτια.

iii) Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f_3(-x)=|-x+1|$$

οπότε δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή

$$f_3(-1)=|-1+1|=0$$

$$f_3(1)=|1+1|=2$$

$$-f_3(1)=-|1+1|=-2$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι $f_3(-1)\neq \pm f_3(1)$ άρα δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

Σημείωσή μου:Πως βρήκαμε το -1 και όχι άλλον αριθμό?

$$f_3(-x)=|-x+1|$$

$$f_3(x)=|x+1|$$

$$-f_3(x)=-|x+1|$$

Αφού $f_3(-x)=|-x+1|\geq 0$ και $-f_3(x)=-|x+1|\leq 0$

αποκλείεται να είναι περιττή.

$f_3(-x)=f_3(x)\Leftrightarrow |-x+1|=|x+1|\Leftrightarrow -x+1=x+1$ ή $-x+1=-(x+1)\Leftrightarrow -x=x$ ή $-x+1=-x-1\Leftrightarrow$

$0=2x$ ή $-x+x=-1-1\Leftrightarrow x=0$ ή $0x=-2$ αδύνατη $\Leftrightarrow x=0$

Αρα η f_3 δεν είναι ούτε άρτια.

Επομένως στην θέση του -1 θα μπορούσαμε να πάρουμε οποιονδήποτε άλλο αριθμό (εκτός του 0).Απλά το -1 είναι ο πιο σε απόλυτη τιμή ακέραιος που μπορούμε να πάρουμε και καλώς παίρνει αυτόν.

iv) Η f_4 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f_4(-x)=(-x)^3-3(-x)^5=-x^3-3\left(-x^5\right)=-x^3+3x^5=-\left(x^3-3x^5\right)=-f_4(x)$$

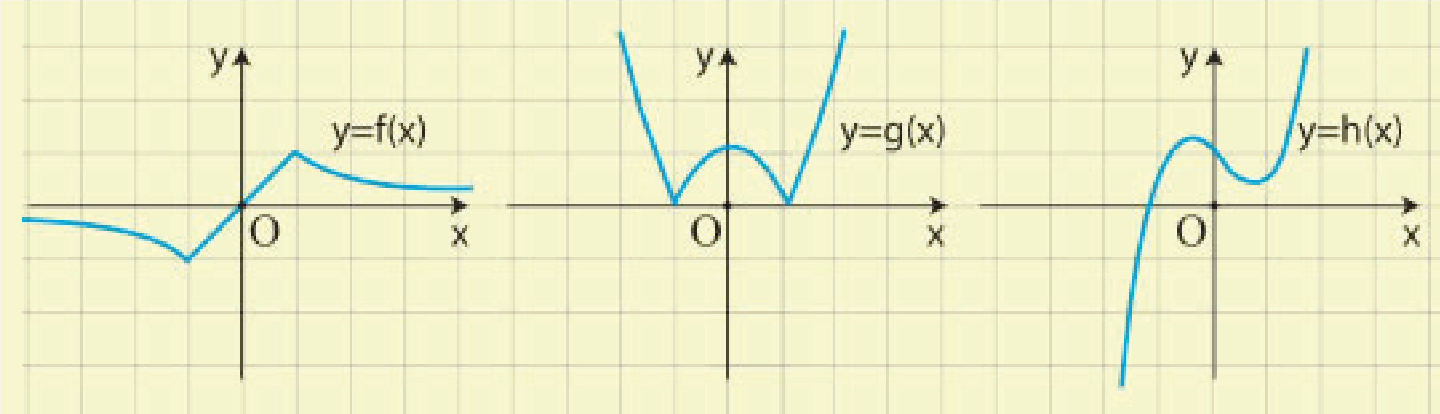
v) Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το 0.Αρα η f_5 δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

vi) Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

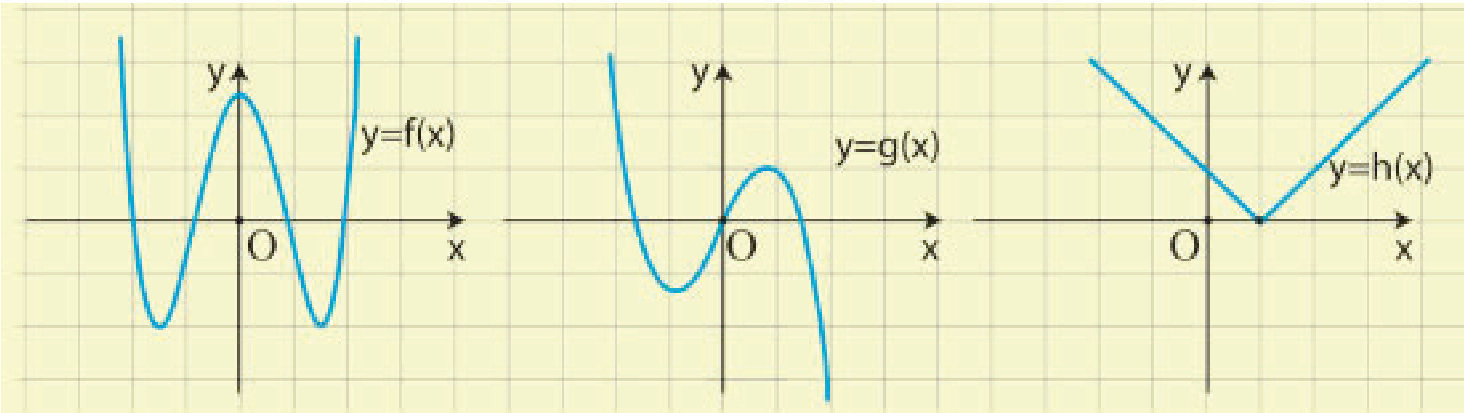
$$f_6(-x)=\frac{-2x}{(-x)^2+1}=\frac{-2x}{x^2+1}=-\frac{2x}{x^2+1}=-f_6(-x)$$

άρα η f_6 είναι περιττή.

6. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης.

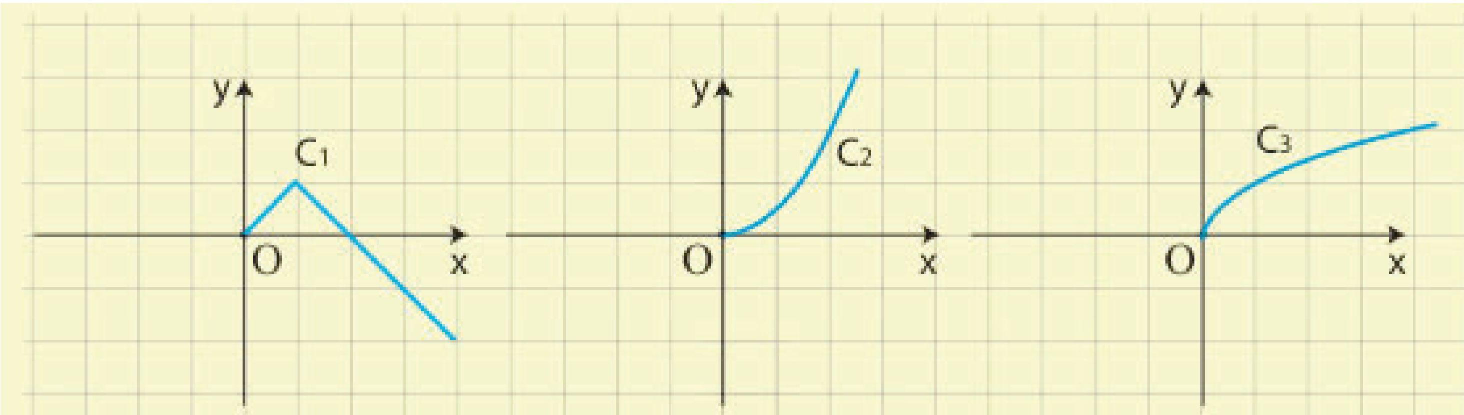


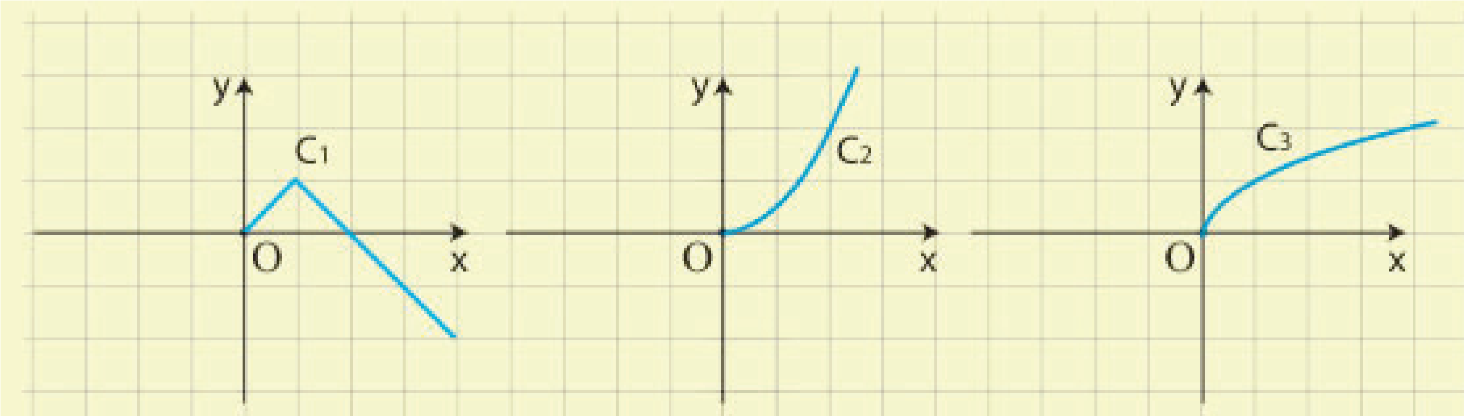
7. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης.



8. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις

α) Αρτιας συνάρτησης και β) Περιττής συνάρτησης.





ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε x∈A ισχύει:

i) -x∈A και

ii) $f(-x) = -f(x)$

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων.

<u>Παράδειγμα:</u>

$f(x) = 2x^3 – x$