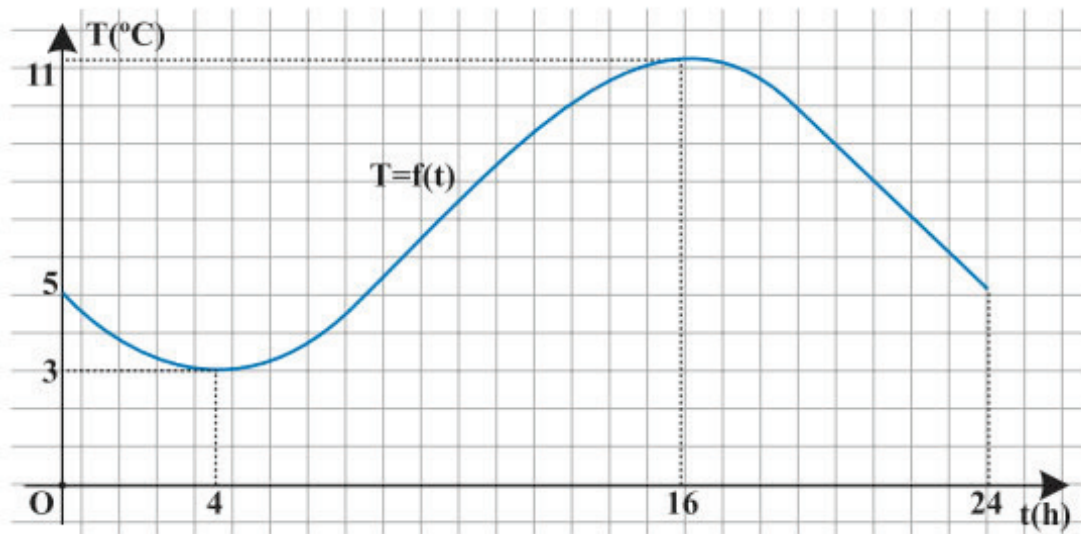


Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $T = f(t)$  που εκφράζει τη θερμοκρασία  $T$  ενός τόπου συναρτήσει του χρόνου  $t$  κατά το χρονικό διάστημα από τα μεσάνυχτα μιας ημέρας ( $t = 0$ ) μέχρι τα μεσάνυχτα της επόμενης μέρας ( $t = 24$ ).



Γενικά στην φύση παρουσιάζονται 2 μεγέθη που **συμμεταβάλλονται** δηλαδή όταν αλλάζει τιμές το ένα αλλάζει τιμές και το άλλο. Ένα πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα είναι να μπορέσουμε να εκφράσουμε αυτή την σχέση μεταξύ των μεγεθών με μια συνάρτηση (έναν τύπο) και να την μελετήσουμε. Για παράδειγμα όταν αυξάνει το ένα μέγεθος αυξάνει και το άλλο **ή** όταν αυξάνει το ένα μικραίνει το άλλο. Και αυτή η σχέση είναι άραγε σταθερή για όλες τις τιμές τους ή για άλλες περιοχές τιμών ισχύει το ένα και για άλλες το άλλο;

## ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται **γνησίως αύξουσα** (*strictly increasing*) σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για **οποιαδήποτε**  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:  $f(x_1) < f(x_2)$ .

→ Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta$  γράφουμε  $f \uparrow \Delta$

- Να δείξετε ότι, η συνάρτηση  $f(x) = 2x - 3$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

### Λύση:

Πράγματι έστω οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , με  $x_1 < x_2$ . Τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \text{ Άρα είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}$$

- Γενικά: Η συνάρτηση  $f(x) = ax + \beta$ , με  $a > 0$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

## β) ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται **γνησίως φθίνουσα** (*strictly decreasing*) σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:  $f(x_1) > f(x_2)$ ,

→ Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\Delta$  γράφουμε  $f \downarrow \Delta$

- Να δείξετε ότι, η συνάρτηση  $f(x) = -2x + 5$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Λύση:**

Πράγματι, έστω δύο οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , με  $x_1 < x_2$ . Τότε έχουμε:

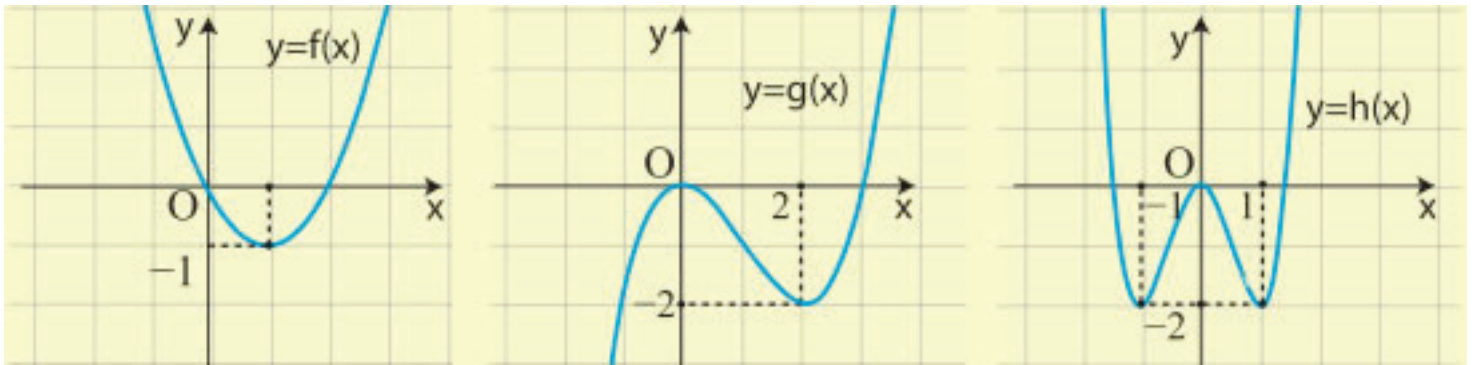
$$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \text{ Άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}$$

- Γενικά: **Η συνάρτηση  $f(x) = ax + \beta$ , με  $a < 0$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .**
- Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  λέγεται **γνησίως μονότονη** στο  $\Delta$ .

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι:

α) γνησίως αύξουσα και β) γνησίως φθίνουσα.



- Η συνάρτηση  $f$  είναι:
  - γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 1]$ .
  - γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[1, +\infty)$ .
- Η συνάρτηση  $g$  είναι
  - γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(-\infty, 0]$ .
  - γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[0, 2]$ .
  - γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[2, +\infty)$ .
- Η συνάρτηση  $h$  είναι:
  - γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, -1]$ .
  - γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[-1, 0]$ .
  - γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[0, 1]$ .
  - γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[1, +\infty)$ .

Σημείωση: Μπορούμε ξεκινώντας από την  $x_1 < x_2$  κατασκευαστικά με χρήση των **ιδιοτήτων των ανισοτήτων** να φτάνουμε στην  $f(x_1) < f(x_2)$  ή  $f(x_1) > f(x_2)$  να αποδείξουμε αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα, αλλά ο τρόπος αυτός έχει μικρό εύρος εφαρμογής. Κατά κανόνα χρησιμοποιούμε το μαθηματικό εργαλείο της **παραγώγου** που θα μάθετε του χρόνου.

Γνωρίζουμε ότι :

- αν  $n$  περιττός τότε ισχύει  $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^n < \beta^n$
  - Μπορώ να πολλαπλασιάσω τα μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό και διατηρείται η φορά της ανίσωσης.
  - Επίσης ότι μπορώ να προσθέτω ανισότητες **ίδιας φοράς** κατά μέλη.
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 3x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Λύση:**

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το  $\mathbb{R}$ . Για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με

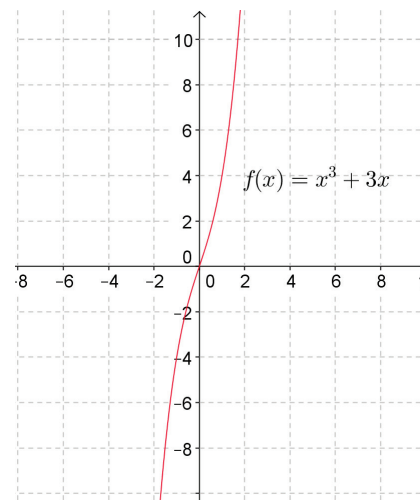
$x_1 < x_2$ , έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2$$

$$\text{Προσθέτουμε κατά μέλη } x_1^3 + 3x_1 < x_2^3 + 3x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\mathbb{R}$ .



• Ας δούμε ένα παράδειγμα που δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί εύκολα με χρήση ιδιοτήτων ανισοτήτων και πώς αυτό λύνεται με χρήση παραγώγων.

• Μπορείτε να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης  $f(x) = x^3 - 3x$  με ανάλογο τρόπο;

**Λύση:**

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το  $\mathbb{R}$ . Για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με

$x_1 < x_2$ , έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2$$

Όμως τώρα δεν μπορώ να προσθέσω τις ανισότητες κατά μέλη, αφού αυτές έχουν αντίθετη φορά.

## Λύση με παραγώγους (προαιρετικό) ημιτελές

Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης  $f(x) = x^3 - 3x$  με χρήση παραγώγου.

Λύση:

Βρίσκω το πεδίο ορισμού που εδώ είναι το  $\mathbb{R}$

• Υπολογίζω την παράγωγο:

$$f'(x) = (x^3 - 3x)' = (x^3)' - (3x)' = 3x^2 - 3(x)' = 3x^2 - 3 \cdot 1 = 3x^2 - 3$$

• Βρίσκω τις ρίζες της παραγώγου

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

• Βρίσκω το πρόσημο της παραγώγου

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$




• Κατασκευάζω έναν πίνακα με 3 γραμμές και 2 στήλες που η δεύτερη είναι πιο φαρδιά.

Στην πρώτη στήλη έχουμε:

- Την πρώτη γραμμή για το  $x$
- Την δεύτερη γραμμή για την παράγωγο συνάρτηση
- Την τρίτη γραμμή για την συνάρτηση.

$x$	
$f'(x)$	
$f(x)$	

- Στην πρώτη γραμμή τοποθετώ τα άκρα του πεδίου ορισμού καθώς και τις ρίζες της παραγώγου.
- Κάτω από τις ρίζες βάζω 0. Έτσι η δεύτερη γραμμή χωρίζεται σε κουτάκια και σε καθένα από αυτά βάζω + ή - ανάλογα με το πρόσημο της παραγώγου που έχω υπολογίσει.
- Αν σε ένα διάστημα (ανοιχτό ή κλειστό) του  $x$  η παράγωγος είναι + (θετική), τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο αντίστοιχο κλειστό διάστημα και αυτό το υποδηλώνω με ένα λοξό προς τα πάνω βέλος.
- Αν αντίθετα σε ένα διάστημα (ανοιχτό ή κλειστό) του  $x$  η παράγωγος είναι - (αρνητική), τότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο αντίστοιχο κλειστό διάστημα και το υποδηλώνω με ένα λοξό προς τα κάτω βέλος.

x	$-\infty$		-1		+1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$							$+\infty$

• Η συνάρτηση f είναι

γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(-\infty, -1]$ .

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-1, 1]$ .

γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[1, +\infty)$ .

Να δούμε και το πιο χαρακτηριστικό τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης σχεδιασμένης με το Geogebra ως επίρρωση (επιβεβαίωση) της αλγεβρικής εργασίας μας.

