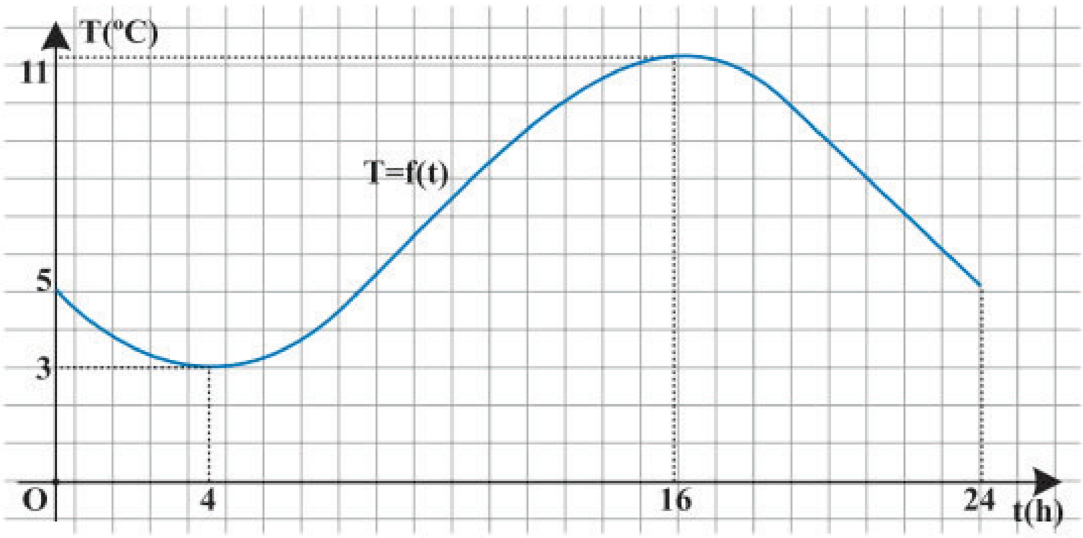
1ο Φυλλάδιο εργασίας μονοτονία συνάρτησης (version 30-9-2016)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$ που εκφράζει τη **θερμοκρασία** T ενός τόπου συναρτήσει του **χρόνου** t κατά το χρονικό διάστημα από τα μεσάνυχτα μιας ημέρας ($t = 0$) μέχρι τα μεσάνυχτα της επόμενης μέρας ($t = 24$).



Γενικά στην φύση παρουσιάζονται 2 μεγέθη που **συμμεταβάλλονται** δηλαδή όταν αλλάζει τιμές το ένα αλλάζει τιμές και το άλλο.Ενα πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα είναι να μπορέσουμε να εκφράσουμε αυτή την σχέση μεταξύ των μεγεθών με μια συνάρτηση (έναν τύπο) και να την μελετήσουμε.Για παράδειγμα όταν αυξάνει το ένα μέγεθος αυξάνει και το άλλο **ή** όταν αυξάνει το ένα μικραίνει το άλλο.Και αυτή η σχέση είναι σταθερή για όλες τις τιμές ή για άλλες περιοχές τιμών ισχύει το ένα και για άλλες το άλλο.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** *(strictly increasing)* σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ....της, όταν για .... $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1)$ ......$f(x_2)$

→ Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \uparrow \Delta$

● Να δείξετε ότι, η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση:

Πράγματι έστω οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow$ ……..

Γενικά: **Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.**

β) ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα *(strictly decreasing)* σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , όταν για οποιαδήποτε x_1, x_2....... με x_1..... x_2 ισχύει:$f(x_1)$ ...... $f(x_2)$,

→ Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \downarrow \Delta$

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

● Να δείξετε ότι, η συνάρτηση $f(x) = -2x + 5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ℝ.

Λύση:

Πράγματι, έστω δύο οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow$ ……..

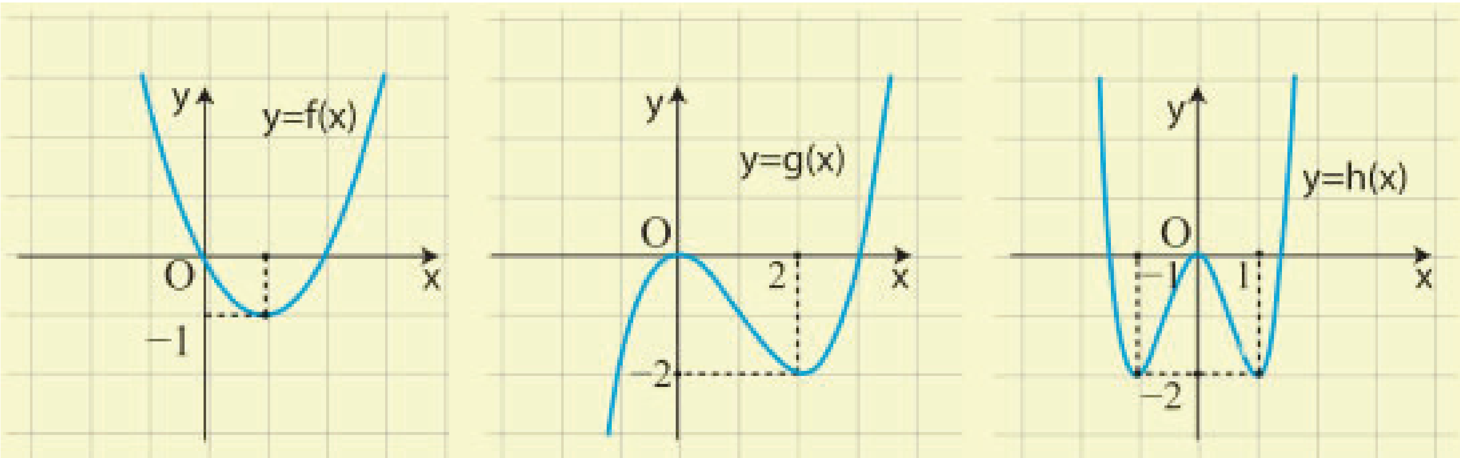
Γενικά: **Η συνάρτηση $f(x) = αx + β$, με $α<0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ℝ.**

● Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνησίως ……………….** στο Δ.

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι:

α) γνησίως αύξουσα και **β)** γνησίως φθίνουσα.



Σημείωση:Μπορούμε ξεκινώντας από την $x_1<x_2$ κατασκευαστικά με χρήση των ιδιοτήτων των ανισοτήτων να φτάνουμε στην $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$ να αποδείξουμε αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα, αλλά ο τρόπος αυτός έχει μικρό εύρος εφαρμογής.Κατά κανόνα χρησιμοποιούμε το μαθηματικό εργαλείο της **παραγώγου** που θα μάθετε του χρόνου.

● Γνωρίζουμε ότι αν ν περιττός τότε ισχύει $α < β \Rightarrow α^ν < β^ν$ και επίσης ότι μπορώ να προσθέτω ανισότητες ίδιας φοράς κατά μέλη

● Να δείξετετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 4x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Λύση:

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$

$x_1 < x_2 \Rightarrow 4x_1 < 4x_2$

Προσθέτουμε κατά μέλη $x_1^3 + 4x_1 < x_2^3 + 4x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

● Μπορείτε να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 4x$ με ανάλογο τρόπο;