ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

Σημείωση: Οι πρώτες 2 ερωτήσεις δεν υπήρχαν σε παλαιότερη έκδοση του σχολικού άρ α

1. Υπάρχει συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α (1,2) και Β(1,3). Α Ψ

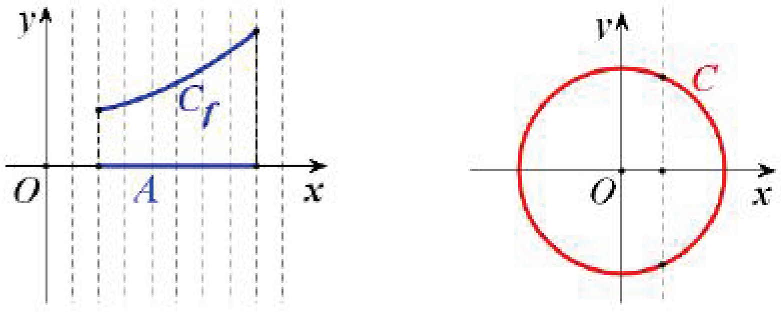
Απάντηση:

Ψ

<u>Αιτιολόγηση</u>: Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.Συνεπώς στο 1 δεν μπορεί να αντιστοιχίζεται και το 2 και το 3,

Υπενθυμίζουμε τι γράφει το βιβλίο Αλγεβρας της Α Λυκείου:

"Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. α'). Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. β').



Σχήμα α΄ Σχήμα β΄

2. Οι ευθείες $y = \alpha^2 x - 2$ και $y = -x + 1$ τέμνονται. Α Ψ

Απάντηση:

Α

Για να τέμνονται πρέπει οι συντελεστές του x (συντελεστές διεύθυνσης) να είναι διαφορετικοί.Πράγματι το α^2 είναι μή αρνητικό για κάθε α οπότε δεν μπορεί να είναι ίσο με -1

1. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η - f είναι γνησίως φθίνουσα. Α Ψ

Απάντηση:

$x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) > -f(x_2)$

Αρα η απάντηση είναι **Α**.

2. Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα.   Α   Ψ

Απάντηση:

Ας ονομάσουμε f την συνάρτηση, ας υποθέσουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα.Αν δεν έχει καμμία ρίζα η πρόταση ισχύει.Αν έχει μια ρίζα την οποία ας συμβολίσουμε με x_1 τότε $f(x_1)=0$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, από τον ορισμό

• Για κάθε x του πεδίου ορισμού με $x< x_1$ θα ισχύει $f(x)<f(x_1)=0$ άρα οι αριθμοί οι μικρότεροι του x_1 δεν είναι ρίζες.

• Για κάθε x του πεδίου ορισμού με $x_1<x$ θα ισχύει $0=f(x_1)<f(x)$ άρα ούτε οι αριθμοί οι μεγαλύτεροι του x_1 είναι ρίζες

Αρα το x_1 είναι μοναδική ρίζα.

Παρόμοια σκέψη και για γνησίως φθίνουσα.

3. Υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία Α (1,2), Β(2,1) και Γ (3,3).

Α   Ψ

Απάντηση:

Ψ

Αιτιολόγηση: Και μόνο αν σχεδιάσουμε τα σημεία σε ένα σύστημα συντεταγμένων καταλαβαίνουμε ότι δεν συνιστούν μια διαδοχή σημείων που να ανεβαίνουν ή να κατεβαίνουν οπότε συμπεραίνουμε ότι δεν είναι γνησίως μονότονη.

Αλγεβρικά.Είναι $1<2$ και $f(1)=2>1=f(1)$ άρα δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα

Είναι $2<3$ και $f(2)=1<3=f(3)$ άρα δεν μπορεί να είναι ούτε γνησίως φθίνουσα.Αρα δεν είναι γνησίως μονότονη.

Να υπενθυμίσω ότι δεν αρκεί για κάποια x_1 και x_2 να ισχύει η σχέση αλλά για οποιαδήποτε (για κάθε ζευγάρι x_1 και x_2 στο πεδίο ορισμού) , έτσι αν υπάρχει ακόμα κι ένα ζευγάρι που δεν ικανοποιεί την συνθήκη τότε δεν είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα.

4. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε θα ισχύει $f(0) < 0$. Α   Ψ

Απάντηση:

Ψ

Αιτιολόγηση : Αφού έχει ρίζα τον αριθμό 1 θα ισχύει $f(1)=0$. Επειδή είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε ότι αφού $0<1$ θα ισχύει $f(0)>f(1)=0$.

5. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α (1,2) και Β (2,5), τότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Α Ψ

Απάντηση:

Α

Αιτιολόγηση :

Το ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Β(1,2) σημαίνει ότι f(1)=2

Το ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Β(2,5) σημαίνει ότι f(2)=5

Είναι 1<2 και 2<5 δηλαδή f(1)<f(2). Αρα είναι γνησίως αύξουασ

6. Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι ίση με 1, τότε η εξίσωση f(x) = 2 είναι αδύνατη.

Α Ψ

Απάντηση:

Α

Αφού η μέγιστη τιμή είναι ίση με 1 για κάθε $x \in A$ θα είναι f(x) $\leq$1<2 άρα δεν μπορούμε να έχουμε για κανένα $x \in A$ f(x) = 2 δηλαδή η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη.

7. Η συνάρτηση F:=[-1,2]→R με f(x) = $3x^2$ είναι άρτια. Α Ψ

Απάντηση:

Ψ

Αιτιολόγηση :

Πρέπει πριν απ΄όλατο πεδίο ορισμού να είναι «συμμετρικό ως προς 0».Εδώ βλέπουμε ότι το $1{,}5 \in [-1{,}2]$ ενώ το $-1{,}5 \notin [-1{,}2]$ ή καλύτερα (όπως προτάθηκε από μαθητή το $2 \in [-1{,}2]$ ενώ το $-2 \notin [-1{,}2]$ Αρα δεν είναι άρτια.

8. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και έχει ρίζα τον αριθμό ρ, τότε θα έχει ρίζα και τον αριθμό -ρ. Α Ψ

Απάντηση:

Α

Αιτιολόγηση :

Αφού είναι άρτια ή περιττή και ο –ρ θα ανήκει στο πεδίο ορισμού.

Αφού ο ρ είναι ρίζα θα ισχύει f(ρ)=0.

Αρα αν η f είναι άρτια έχουμε: $f(-\rho) = f(\rho) = 0$ δηλαδή και ο –ρ είναι ρίζα

Αν η f περιττή $f(-\rho) = -f(\rho) = -0 = 0$ δηλαδή και σε αυτή την περίπτωση ο –ρ είναι ρίζα.

9. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.   Α   Ψ

Απάντηση:

Α

Αιτιολόγηση :

Εστω $\mathrm{x} \in A$ με $\mathrm{x} > 0$.Τότε $-\mathrm{x} < 0$. Δηλαδή $-\mathrm{x} < x$ και αν ήταν γνησίως αύξουσα θα έπρεπε $f(-\mathrm{x}) < \mathrm{f}(x)$ ενώ αφού είναι άρτια γνωρίζουμε ότι ισχύει $f(-\mathrm{x}) = \mathrm{f}(x)$

Παρόμοια απορρίπτεται και η περίπτωση να είναι γνησίως φθίνουσα.

Αρα δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη.

10. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η -f είναι περιττή.   Α   Ψ

Απάντηση:

Ψ

Αιτιολόγηση :

Γραφικά

Το διαπιστώνουμε αν θεωρήσουμε την γραφική παράσταση μιας άρτιας για παράδειγμα της $f(x) = x^2$.Η –f έχει γραφική παράσταση την συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα x’x.Το “καθρέπτισμά της» θα λέγαμε ως προς των x’x.Αρα είναι πάλι άρτια

Αλγεβρικά

Αφού είναι άρτια για κάθε $\mathrm{x} \in A$ θα είναι $-\mathrm{x} \in A$ που αποτελεί και τμήμα του ορισμού της περιττής.

Αφού είναι άρτια για κάθε $\mathrm{x} \in A$ έχουμε:

$f(-x) = f(x) \Longrightarrow -f(-x) = -f(x) \Longrightarrow (-f)(-x) = (-f)(x)$ άρα και η –f είναι και αυτή άρτια.