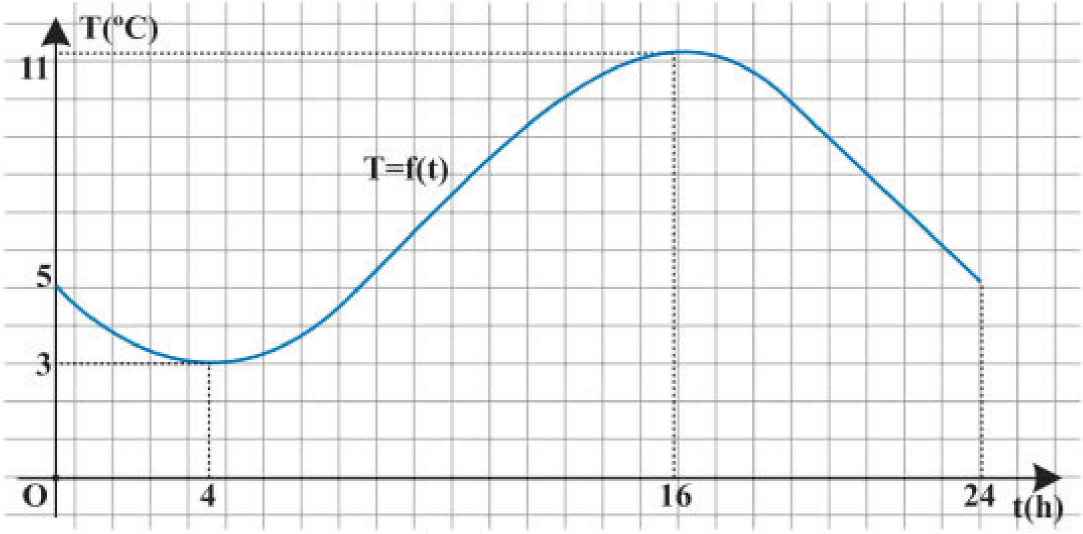
Ελάχιστο και μέγιστο συνάρτησης

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$ που εκφράζει τη θερμοκρασία T ενός τόπου συναρτήσει του χρόνου t κατά το χρονικό διάστημα από τα μεσάνυχτα μιας ημέρας ($t = 0$) μέχρι τα μεσάνυχτα της επόμενης μέρας ($t = 24$).



Παρατηρούμε ότι:

α) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει την <u>ελάχιστη</u> τιμή της, που είναι η $f(4) = 3$ βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$f(t) \geq f(4) = 3$, για κάθε $t \in [0,24]$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 4$ ελάχιστο, το $f(4) = 3$.

Γενικά :

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο όταν: $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

Το $x_0 \in A$ λέγεται **θέση ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με **min $f(x)$.**

● Για παράδειγμα, ας δείξουμε ότι συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 1$ παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο.

Απόδειξη:

Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$x^4 \geq 0 \Rightarrow$ (κάθε άρτια δύναμη είναι μή αρνητικός αριθμός)

$3x^4 \geq 3 \cdot 0 \Rightarrow$ μπορούμε τα μέλη μιας ανίσωσης να τα πολλαπλασιάσουμε με έναν θετικό αριθμό και η φορά της ανίσωσης διατηρείται

$3x^4 + 1 \geq 3 \cdot 0 + 1 \Rightarrow$ μπορούμε στα μέλη μιας ανίσωσης να προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό.

$3x^4 + 1 \geq 3 \cdot 0^4 + 1 \Rightarrow$ $(0^4=0)$

$f(x) \geq f(0)$

Αρα η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.

Παρατήρηση: Ας δούμε πώς δουλέψαμε λοιπόν στο πιο πάνω παράδειγμα. Ξεκινάμε από μια γνωστή ανισότητα σχετική με τον τύπο της συνάρτησης και μετά χρησιμοποιώντας ιδιότητες των ανισοτήτων «χτίζουμε» την ανίσωση $f(x) \geq f(x_0)$.

Ο τρόπος αυτός εργασίας βοηθάει βέβαια για την εμπέδωση του ορισμού, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε λίγους τύπους συναρτήσεων.

Υπάρχει μια πολύ αποτελεσματική και γενική μέθοδος εργασίας για μονοτονία και ακρότατα που θα διδαχθείτε του χρόνου.Δηλαδή θα μας δίνεται μια συνάρτηση f, εμείς θα υπολογίζουμε μια άλλη συνάρτηση f’(παράγωγος συνάρτηση) και το πρόσημο της f’ θα μας δίνει πληροφορίες για την f.

β) Τη χρονική στιγμή $t_2 = 16$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει τη μέγιστη τιμή της, που είναι η

$T(16) = 11$ βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$f(t) \le f(16) = 11$, για κάθε $t \in [0,24]$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 16$ μέγιστο, το $f(16) = 11$ Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο όταν $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

Το $x_0 \in A$ λέγεται **θέση μεγίστου** ενώ το $f(x_0)$ **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο** της f και το συμβολίζουμε με $\max f(x)$.

● Για παράδειγμα, να δείξετε ότι συνάρτηση $f(x) = -3x^4 + 1$ παρουσιάζει μέγιστο στο 0.

Απόδειξη:

Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$x^4 \ge 0 \Rightarrow$ (κάθε άρτια δύναμη είναι μή αρνητικός αριθμός)

$-3x^4 \le -3 \cdot 0 \Rightarrow$ μπορούμε τα μέλη μιας ανίσωσης να τα πολλαπλασιάσουμε με έναν αρνητικό αριθμό και η φορά της ανίσωσης αλλάζει.

$-3x^4 + 1 \le -3 \cdot 0 + 1 \Rightarrow$ μπορούμε στα μέλη μιας ανίσωσης να προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό.

$-3x^4 + 1 \le -3 \cdot 0^4 + 1 \Rightarrow$ $(0^4=0)$

$f(x) \le f(0)$

Αρα η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

ΣΧΟΛΙΟ

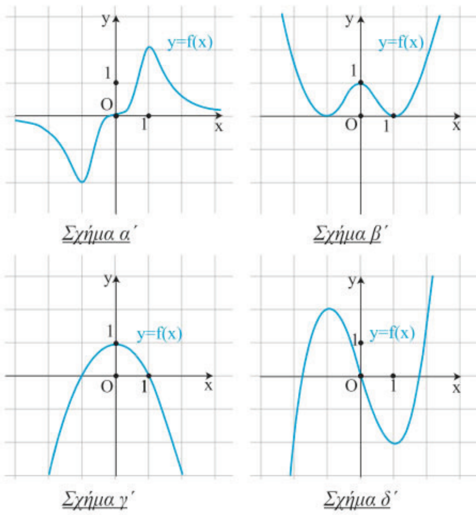
Μια συνάρτηση ενδέχεται να έχει:

και μέγιστο και ελάχιστο (Σχ.α) ή

μόνο μέγιστο (Σχ. γ) ή

μόνο ελάχιστο (Σχ. β) ή

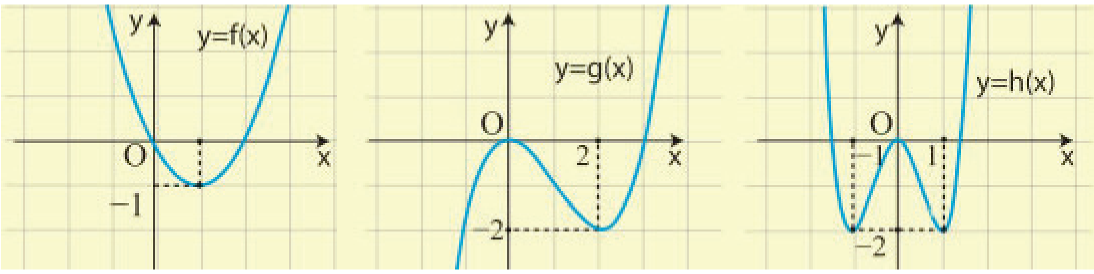
να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (Σχ δ).



Σχήμα α΄ Σχήμα β΄ Σχήμα γ΄ Σχήμα δ΄

2. Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

Λύση:



● Η f δεν έχει ολικό μέγιστο αφού επεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω.

Εχει ολικό ελάχιστο για x=1, το f(x) = –1

● Η g δεν έχει ούτε ολικό ελάχιστο ούτε ολικό μέγιστο.

<u>Σημείωση</u>: Στο 0 παρουσιάζει οπως λέμε <u>τοπικό</u> μέγιστο και στο 2 <u>τοπικό</u> ελάχιστο αλλά αυτά θα τα δούμε του χρόνου.

● Η h έχει ολικό ελάχιστο για x= –1 και για x=1, το h(-1) = h(1) = –2.

Δεν έχει ολικό μέγιστο.