5. Να λυθεί η εξίσωση

$ημ^2x = συν^2x$

ΛΥΣΗ:

Τα x για τα οποία $συν^2x = 0 \Leftrightarrow συνx = 0 \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$ δεν είναι λύσεις της εξίσωσης γιατί για αυτά ισχύει $ημx = 1$ ή $ημx = -1$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση παίρνουμε την μή αληθή σχέση $1 = 0$

Αρα θεωρούμε ότι $συνx \neq 0$ και πλέον μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $συν^2x \neq 0$

$$ημ^2x = συν^2x \Leftrightarrow \frac{ημ^2x}{συν^2x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{ημx}{συνx}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow εφ^2x = 1 \Leftrightarrow \ εφx = 1 \text{ ή } εφx = -1 \Leftrightarrow$$

$$εφx = εφ\frac{π}{4} \text{ ή } εφx = εφ\left(-\frac{π}{4}\right) \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{4} \textbf{ ή } x = κπ - \frac{π}{4} \quad κ \in \mathbb{Z}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση

$f(x) = (λ^2 - 4λ + 4)^x$

α) Να υπολογίσετε το λ ώστε η συνάρτηση να είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αν το σημείο $A(1,9)$ ανήκει στην γραφική παράσταση C_f να υπολογίσετε το λ

γ) Αν $λ \in (2,3)$ να λυθεί η εξίσωση $f(x^2) > f(5x-6)$

δ) Αν $λ = 4$ να λυθεί η ανίσωση :

$2f(x) + 3 \cdot 9^x - 56^x \leq 0$

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι γνησίως αύξουσα πρέπει $λ^2 - 4λ + 4 > 1 \Leftrightarrow λ^2 - 4λ + 3 > 0$

Βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου $λ^2 - 4λ + 3$:

$α = 1$, $\quad β = -4 \quad γ = 3$

$Δ = β^2 - 4αγ = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$$λ_{1,2} = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

Οπότε

$λ_1 = \frac{6}{2} = 3$

$λ_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Κάνουμε πινακάκι για το πρόσημο του $λ^2 - 4λ + 3$ σύμφωνα με όσα είχαμε διδαχθεί στην Α Λυκείου.Εδώ α=1>0

λ	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$\lambda^2-4\lambda+3$		+	0	-	0	+	

Από το πινακάκι παρατηρούμε ότι $\lambda^2-4\lambda+3>0 \Leftrightarrow \lambda\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.

β) Οι συντεταγμένες του $A(1,9)$ θα επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης, δηλαδή

$f(1)=9 \Leftrightarrow (\lambda^2-4\lambda+4)^1=9 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+4=9 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+4-9=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda-5=0$

$\alpha=1$, $\beta=-4$ $\gamma=-5$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)=16+20=36$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}=\frac{4\pm6}{2}$$

Οπότε

$\lambda_1=\frac{10}{2}=5$

$\lambda_2=\frac{4-6}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

γ) Οταν $\lambda\in(2,3)$ τότε από το α) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=(\lambda^2-4\lambda+4)^x$ θα είναι γνησίως φθίνουσα οπότε $f(x^2)>f(5x-6) \Leftrightarrow x^2<5x-6 \Leftrightarrow x^2-5x+6<0$

$\alpha=1$, $\beta=-5$ $\gamma=6$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}$$

Οπότε

$x_1=\frac{6}{2}=3$

$x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	-	0	+	

$x^2-5x+6<0 \Leftrightarrow x\in(1,3)$

δ) Αν $\lambda = 4$ τότε $f(x) = (4^2 - 4\cdot 4 + 4)^x = (4^2 - 4\cdot 4 + 4)^x = (16 - 16 + 4)^x = 4^x$

Επομένως $2f(x) + 3\cdot 9^x - 5\cdot 6^x \leq 0 \Leftrightarrow 2\cdot 4^x + 3\cdot 9^x - 5\cdot 6^x \leq 0 \Leftrightarrow 2\cdot(2^2)^x + 3\cdot(3^2)^x - 5\cdot(2\cdot 3)^x \leq 0$

$$\Leftrightarrow 2\cdot(2^2)^x + 3\cdot(3^2)^x - 5\cdot(2\cdot 3)^x \leq 0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x} + 3\cdot 3^{2x} - 5\cdot 2^x\cdot 3^x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2\cdot 2^{2x}}{3^{2x}} + \frac{3\cdot 3^{2x}}{3^{2x}} - \frac{5\cdot 2^x\cdot 3^x}{3^{2x}} \leq \frac{0}{3^{2x}} \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \frac{3\cdot \cancel{3^{2x}}}{\cancel{3^{2x}}} - \frac{5\cdot 2^x\cdot 3^x}{3^x\cdot 3^x} \leq \frac{0}{3^{2x}} \Leftrightarrow 2\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 0$$

Θέτουμε $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \omega > 0$ και η ανίσωση γράφεται:

$2\omega^2 + 3 - 5\omega \leq 0 \Leftrightarrow 2\omega^2 - 5\omega + 3 \leq 0$

Βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου $2\omega^2 - 5\omega + 3$

$\alpha = 2$, $\beta = -5$ $\gamma = 3$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = 25 - 24 = 1$

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

Οπότε

$$\omega_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\omega_2 = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Κάνουμε πινακάκι για το πρόσημο του $2\omega^2 - 5\omega + 3$ σύμφωνα με όσα είχαμε διδαχθεί στην Α Λυκείου.Εδώ α=2>0

ω	0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2\omega^2 - 5\omega + 3$		+	0	-	0	+	

Από το πινακάκι παρατηρούμε ότι $2\omega^2 - 5\omega + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \omega \leq \frac{3}{2}$.

Ομως εμείς θέλουμε να λύσουμε ανίσωση ως προς x και όχι ως προς ω. Ας θυμηθούμε λοιπόν ότι είχεμε θέσει $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \omega$ οπότε :

$1 \leq \omega \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow$ *(Επειδή $\frac{2}{3} < 1$ η συνάρτηση $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα)*

$-1 \leq x \leq 0$

1. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=2x^3+(\alpha+\beta)x^2+(2\alpha+5\beta)x+3$$

Για το οποίο γνωρίζουμε ότι το $x+1$ είναι παράγοντάς του και ότι διαιρούμενο με το $x-2$ έχει υπόλοιπο υ=-9.

Α) Να βρεθούν τα α και β

Β) Αν α=-7 και β-2 να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

ΛΥΣΗ:

Αφού το $x+1=x-(-1)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου από την θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$P(-1)=0\Leftrightarrow 2(-1)^3+(\alpha+\beta)(-1)^2+(2\alpha+5\beta)(-1)+3=0\Leftrightarrow 2(-1)+(\alpha+\beta)\cdot 1-2\alpha-5\beta+3=0\Leftrightarrow$$

$$-2+\alpha+\beta-2\alpha-5\beta+3=0\Leftrightarrow -\alpha-4\beta+1=0\Leftrightarrow -\alpha-4\beta=-1\Leftrightarrow \alpha+4\beta=1$$

Γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με ένα πολυώνυμο της μορφής $x-\rho$ είναι το $P(\rho)$. Οποτε:

$$P(2)=-9\Leftrightarrow 2\cdot 2^3+(\alpha+\beta)2^2+(2\alpha+5\beta)2+3=-9\Leftrightarrow 2\cdot 8+(\alpha+\beta)\cdot 4+4\alpha+10\beta+3=-9\Leftrightarrow$$

$$16+4\alpha+4\beta+4\alpha+10\beta+3=-9\Leftrightarrow 8\alpha+14\beta=-16-3-9\Leftrightarrow 8\alpha+14\beta=-28\Leftrightarrow 4\alpha+7\beta=-14$$

Λύνουμε πλέον το σύστημα

$$\begin{cases}\alpha+4\beta=1\\ 4\alpha+7\beta=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-4\beta\\ 4(1-4\beta)+7\beta=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-4\beta\\ 4-16\beta+7\beta=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-4\beta\\ -9\beta=-14-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-4\beta\\ -9\beta=-18\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-4\beta\\ 9\beta=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-4\beta\\ \dfrac{9\beta}{9}=\dfrac{18}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-4\cdot 2\\ \beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-7\\ \beta=2\end{cases}$$

Β) Αν α=-7 και $\beta=2$ το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+(\alpha+\beta)x^2+(2\alpha+5\beta)x+3$ επειδή:

$$\alpha+\beta=-7+2=-5$$

$$2\alpha+5\beta=2(-7)+5\cdot 2=-14+10=-4$$

γίνεται:

$P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$ επομένως $P(x)=0\Leftrightarrow 2x^3-5x^2-4x+3=0$

Επειδή η εξίσωση είναι τρίτου βαθμού προσπαθώ να παραγοντοποιήσω το $1^{ο}$ μέλος

Επειδή το πολυώνυμο έχει ακέραιους συντελεστές, από το θεώρημα ακέραιων ριζών οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτης του σταθερού όρου 3 δηλαδή οι ± 1 και ± 3.

Με σχήμα Horner προσπαθώ διαδοχικά να εξακριβώσω αν κάποιες από αυτές είναι ρίζα.

2	-5	-4	3	1
	2	-3	-7	
2	-3	-7	-4	

Αρα ο 1 δεν είναι ρίζα.

2	-5	-4	3	-1
	-2	+7	-3	
2	-7	+3	0	

Αρα το -1 είναι ρίζα και το $P(x)=(x-1)(2x^2-7x+3)$ και η εξίσωση γίνεται

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2-7x+3)=0$$

Απομένει να λύσω πλέον την $2x^2-7x+3=0$ για να βρώ και τις υπόλοιπες ρίζες.

$\alpha=2$, $\beta=-7$ $\gamma=3$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-7)^2-4\cdot 2\cdot 3=49-24=25$$

$$x_{2,3}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm 5}{4}$$

Οπότε

$$x_2=\frac{12}{4}=3$$

$$x_3=\frac{7-5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Αρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=\frac{1}{2}$

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}\right)$$

α. Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού.

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=2\ln 2$.

γ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x)>0$.

ΛΥΣΗ:

α. Η παράσταση $e^{x}+5$ είναι θετική αφού $e^{x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $e^{x}+5>5>0$

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}>0\Leftrightarrow e^{2x}-1>0\Leftrightarrow e^{2x}>1\Leftrightarrow e^{2x}>e^{0}\Leftrightarrow 2x>0\Leftrightarrow x>0$$

Αρα το πεδίο ορισμού είναι το $A=(0,+\infty)$

β. $f(x)=2\ln 2\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}\right)=2\ln 2\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}\right)=\ln 2^{2}\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}\right)=\ln 4$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}=4\Leftrightarrow e^{2x}-1=4\left(e^{x}+5\right)\Leftrightarrow e^{2x}-1=4e^{x}+20\Leftrightarrow e^{2x}-4e^{x}-21=0$$

$$\left(e^{x}\right)^{2}-4e^{x}-21=0$$

Θέτω :

$e^{x}=\omega$.Αφού $e^{x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι και ω>0

Αρα η (1) γίνεται

$$\omega^{2}-4\omega-21=0$$

$\alpha=1$, $\beta=-4$ $\gamma=-21$

$$\Delta=\beta^{2}-4\alpha\gamma=(-4)^{2}-4\cdot1\cdot(-21)=16+84=100$$

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4\pm\sqrt{100}}{2\cdot1}=\frac{4\pm10}{2}$$

Οπότε

$$\omega_{1}=\frac{14}{2}=7$$

$\omega_{2}=\frac{4-10}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ απορρίπτεται

Αρα τελικά $e^{x}=7\Leftrightarrow x=\ln 7$

γ. $f(x)>0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)>0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)>\ln 1 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^x+5}>1$

Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $e^x+5>5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με το e^x+5 και τα δύο μέλη της ανίσωσης και η φορά της διατηρείται.

$$e^x+5\cdot\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}>1\cdot\left(e^x+5\right)\Leftrightarrow e^{2x}-1>e^x+5\Leftrightarrow e^{2x}-e^x-6>0\Leftrightarrow\left(e^x\right)^2-e^x-6>0$$

Θέτω :

$e^x=\omega$.Αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι και ω>0

$\omega^2-\omega-6>0$

$\alpha=1$, $\beta=-1$ $\gamma=-6$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-1\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-6\right)=1+24=25$

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{1\pm5}{2}$$

Οπότε

$\omega_1=\frac{6}{2}=3$

$\omega_2=\frac{1-5}{2}=\frac{-4}{2}=-2$ απορρίπτεται

Το τριώνυμο $\omega^2-\omega-6$ έχει δύο ρίζες τις -2 και 3 και ζητάμε για ποιά ω είναι θετικό, δηλαδή ομόσημο του α=1.Από την θεωρία της Α Λυκείου γνωρίζουμε ότι αυτό γίνεται για ω εκτός των ριζών.Επειδή όμως το ω είναι θετικός παίρνουμε μόνο:

$\omega>3\Leftrightarrow e^x>3\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right)>\ln 3\Leftrightarrow x>\ln 3$

3. Δίνεται η συνάρτηση

$f(x)=\log(x+4)-3$

α) Να βρεθεί το Π.Ο

β) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράσταση C_f με τους άξονες

γ) Αν $A(\kappa,-2)\in C_f$ να βρεθεί το κ.

α) Πρέπει $x+4>0 \Leftrightarrow x>-4$

Αρα Π.Ο.$=(-4,+\infty)$

β) ● Για να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής με τον άξονα $x'x$ θέτουμε:

$f(x)=0 \Leftrightarrow \log(x+4)-33=0 \Leftrightarrow \log(x+4)=3 \Leftrightarrow x+4=10^3 \Leftrightarrow x+4=1000 \Leftrightarrow x=1000-4 \Leftrightarrow x=996$

Αρα A$=(996,\ 0)$

● Για να βρούμε την τεταγμένη του σημείου τομής με τον άξονα $y'y$ θέτουμε:

$f(0)=\log(0+4)-3=\log 4-3$

Αρα B$=(0,\log 4-3)$

γ) Αφού $A(\kappa,-2)\in C_f$ θα είναι

$f(\kappa)=-2 \Leftrightarrow \log(\kappa+4)-3=-2 \Leftrightarrow \log(\kappa+4)=3-2 \Leftrightarrow \log(\kappa+4)=1 \Leftrightarrow \kappa+4=10 \Leftrightarrow \kappa=10-4 \Leftrightarrow \kappa=6$

δ) $f(3^{x+3})=\log(x+4)-3$

4. Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} \eta\mu(\pi+\theta)x+\sigma\upsilon\nu(-\theta)y=1 \\ \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)x-\eta\mu(\theta-\pi)y=1 \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta,\ \eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)$.

β) Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-4$, τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $xy=f(\theta)$ έχει μοναδική λύση.

ΛΥΣΗ:

α) $\eta\mu(\pi+\theta)=-\eta\mu\theta$

$\sigma\upsilon\nu(-\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta$

$\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\theta$

$\eta\mu(\theta-\pi)=\eta\mu[-(\pi-\theta)]=-\eta\mu(\pi-\theta)=-\eta\mu\theta$

Ετσι το σύστημα γράφεται πιο απλά:

$$\begin{cases} -\eta\mu\theta\mathbf{x}+\sigma\upsilon\nu\theta\mathbf{y}=1 \\ \sigma\upsilon\nu\theta\mathbf{x}+\eta\mu\theta\mathbf{y}=1 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} -\eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \\ \sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta \end{vmatrix}=-\eta\mu\theta\cdot\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=-\eta\mu^2\theta-\sigma\upsilon\nu^2\theta=-\left(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)=-1\neq 0$$

Αρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και υπολογίζουμε *(με την μέθοδο των οριζουσών)*

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & \sigma\upsilon\nu\theta \\ 1 & \eta\mu\theta \end{vmatrix}=\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$D_y=\begin{vmatrix} -\eta\mu\theta & 1 \\ \sigma\upsilon\nu\theta & 1 \end{vmatrix}=-\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta$$

Αρα $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}{-1}=-\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta$

$y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}{-1}=\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta$

β) $xy=f(\theta)\Leftrightarrow(-\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)=7\sigma\upsilon\nu\theta-4\Leftrightarrow(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)(\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta)=7\sigma\upsilon\nu\theta-4\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta=7\sigma\upsilon\nu\theta-4\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\theta-\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)=7\sigma\upsilon\nu\theta-4\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\theta-1+\sigma\upsilon\nu^2\theta=7\sigma\upsilon\nu\theta-4\Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^2\theta-7\sigma\upsilon\nu\theta+3=0$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu\theta=\omega$ οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$2\omega^2 - 7\omega + 3 = 0$$

$\alpha = 2$, $\beta = -7$ $\gamma = 3$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = 49 - 24 = 25$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2\cdot 2} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

Οπότε:

$$\omega_1 = \frac{12}{4} = 3$$

$$\omega_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Επομένως έχουμε:

$\omega_1 = 3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = 3$ που είναι **αδύνατη** αφού γνωρίζουμε πως $-1 \le \sigma\upsilon\nu\theta \le 1$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

Επίσης $\omega_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $\theta = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}$ όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi^2 x - \eta\mu^2 x = \varepsilon\varphi^2 x \cdot \eta\mu^2 x$$

ΛΥΣΗ:

$$\varepsilon\varphi^2 x - \eta\mu^2 x = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \eta\mu^2 x = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x\left(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x\right)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\eta\mu^2 x \cdot \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot \eta\mu^2 x = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2 \cdot \eta\mu^2 x = \varepsilon\varphi^2 x \cdot \eta\mu^2 x$$