►Να λύσετε την παρακάτω εξίσωση 3^{ου} βαθμού:

$x^3-4x^2+2x+4=0$

Λύση

Ας ονομάσουμε $P(x)$ το πολυώνυμο στο πρώτο μέλος.Εκ πρώτης όψεως δεν φαίνεται να μπορεί να παραγοντοποιηθεί εύκολα το $P(x)$ με παραγοντοποίηση κατά ομάδες οπότε θα προσπαθήσουμε να το παραγοντοποιήσουμε με το **Θεώρημα ακέραιων ριζών** (σ. 141 σχολικού) που λέει ότι αν ένα πολυώνυμο έχει ακέραιους συντελεστές *(κι εδώ έχουμε ακέραιους συντελεστές 1, -4, +, 4)*, τότε οι πιθανές ακέραιες ρίζες του είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου δηλαδή του 4.Επομένως οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι αριθμοί ±1, ±2, ±4. Αρχίζουμε τώρα και δοκιμάζουμε αυτούς τους αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο να βρούμε ποιός ίσως είναι ρίζα.Θα χρησιμοποιήσουμε σχήμα Horner.Αν το **τελευταίο** κελλί της τρίτης γραμμής του Horner είναι 0, τότε ο αριθμός που δοκιμάζουμε είναι ρίζα.

- Δοκιμάζουμε το 1

1	-4	2	4	**ρ=1**
	1	-3	-1	
1	-3	-1	3	

Αφού το τελευταίο κελλί είναι 3 $\neq 0$ συμπεραίνουμε ότι το 1 **δεν** είναι ρίζα.

- Δοκιμάζουμε το -1

1	-4	2	4	**ρ=-1**
	-1	5	-7	
1	-5	7	-3	

Αφού το τελευταίο κελλί είναι -3 $\neq 0$ συμπεραίνουμε ότι το -1 **δεν** είναι ρίζα.

- Δοκιμάζουμε το 2

1	-4	2	4	**ρ=2**
	2	-4	-4	
1	-2	-2	0	

Αφού το τελευταίο κελλί είναι 0, το 2 είναι ρίζα, συνεπώς *(ΘΕΩΡΗΜΑ σ.135 σχολικοό)* το x-2 διαιρεί το $P(x)$ δηλαδή :

$P(x)=(x-2)\cdot\pi(x)$ όπου οι συντελεστές του $\pi(x)$ είναι οι αριθμοί της τελευταίας γραμμής του σχήματος Horner.

δηλαδή $\pi(x)=x^2-2x-2$.

Αρα η αρχική εξίσωση γίνεται :

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x^2-2x-2)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ή $x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x^2-2x-2=0$

Η $x^2-2x-2=0$ είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού με α=1, β=-2 και γ=-2, άρα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-2\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-2\right)=4+8=12$ οπότε :

$$x_{2,3}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{4\cdot3}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4}\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$$

$x_2=1+\sqrt{3}$ και $x_3=1-\sqrt{3}$.

Αρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x_1=2$, $x_2=1+\sqrt{3}$ και $x_3=1-\sqrt{3}$.

► Να συντάξεται πινακάκι όπου θα φαίνεται το πρόσημο του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του *x*.

i) $P(x)=(2-3x)(x^2-x-2)(x^2-x+1)$

ii) Ακολούθως με βάση το πινακάκι να λύσετε την ανίσωση $P(x)\leq 0$

ΛΥΣΗ:

● $2\text{-}3x\geq 0 \Leftrightarrow \quad 2\geq 3x \Leftrightarrow 3x\leq 2 \Leftrightarrow \frac{3x}{3}\leq\frac{2}{3}\Leftrightarrow x\leq\frac{2}{3}$

● α=1, β=-1 γ=-2

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}x_1=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2\\ x_2=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1\end{cases}$$

Σύμφωνα με την θεωρία για το πρόσημο τριωνύμου που μάθατε στην Α Λυκείου, αφού το τριώνυμο έχει δύο ρίζες, είναι ομόσημο του α=1>0 εκτός των ριζών και ετερόσημο του α=1 (δηλαδή αρνητικό) μεταξύ των ριζών *(για τις ρίζες παίρνει φυσικά την τιμή 0).*

● α=.1, β=-1 γ=1

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=1-4=-3<0$

Επειδή η Δ (διακρίνουσα) είναι αρνητική σύμφωνα με την θεωρία για το πρόσημο τριωνύμου που μάθατεστην Α Λυκείου το τριώνυμο είναι για κάθε *x* ομόσημο του α=1 δηλαδή για κάθε *x* είναι θετικό:

$x^2-x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω συντάσουμε τον πίνακα για το πρόσημο καθενός παράγοντα, ενώ η τελευταία σειρά που μας δίνει το πρόσημο του $P(x)$ συμπληρώνεται εφαρμόζοντας επαναληπτικά τον κανόνα προσήμων του πολλαπλασιασμού **:** $(+)\cdot(+)=+ \qquad (+)\cdot(-)=- \qquad (-)\cdot(-)=+$

x	-∞		-1		$\frac{2}{3}$		2		∞
2-3x		+	|	+	0	-	|	-	
x^2-x-2		+	0	-	|	-	0	+	
x^2-x+1		+	|	+	|	+	|	+	
P(x)		+	0	-	0	+	0	-	

$P(x)\leq 0\Leftrightarrow x\in\left[-1,\frac{2}{3}\right]\cup[2,\infty)$

► Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$

i) Να βρείτε το Πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 10)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)-f(1)=0$ (Μονάδες15)

Λύση :

i) Πρέπει :

$e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$ (επειδή e>1, η συνάρτηση $f(x)=e^x$ είναι γνησίως αύξουσα)

ii)

$f(2x)-f(1)=0 \Leftrightarrow \ln(e^{2x}-1)-\ln(e^1-1)=0 \Leftrightarrow \ln(e^{2x}-1)=\ln(e^1-1) \Leftrightarrow$

$e^{2x}-1=e^1-1 \Leftrightarrow e^{2x}=e^1 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

► Δίνεται η λογαριθμική ανίσωση $\log(3x-1)<\log(x+5)$

i) Να κάνετε τους περιορισμούς.

ii) Να την λύσετε.

iii) Να λυθεί και η ανίσωση $5^{\frac{3x+2}{x-2}}>5^2$.

iv) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων.

Λύση:

i) Η $\log(3x-1)$ ορίζεται για $3x-1>0 \Leftrightarrow 3x>1 \Leftrightarrow \frac{3x}{3}>\frac{1}{3} \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$ **(1)**

Η $\log(x+5)$ ορίζεται για $x+5>0 \Leftrightarrow x>-5$ **(2)**

Συναληθεύοντας τους δύο περιορισμούς **(1)** και **(2)** βλέπουμε ότι πρέπει $x>\frac{1}{3}$. **(3)**

ii) Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\log x$ είναι γνησίως αύξουσα, για τα x που ικανοποιούν τον περιορισμό έχουμε:

$\log(3x-1)<\log(x+5) \Leftrightarrow 3x-1<x+5 \Leftrightarrow 2x<6 \Leftrightarrow x<3$ **(4)**

Αρα τελικά λύσεις της ανίσωσης οι κοινές λύσεις των **(3)** και **(4)** δηλαδή τα $x\in\left(\frac{1}{3},3\right)$. **(5)**

iii) Η συνάρτηση $f\left(x\right)=5^{x}$, είναι γνησίως αύξουσα (επειδή 5>1). Επομένως έχουμε:

$5^{\frac{3x+2}{x-2}}>5^{2}\Leftrightarrow\frac{3x+2}{x-2}>2$ ΠΡΟΣΟΧΗ! Εδώ δεν κάνουμε «χιαστί» γιατί το x-2 για x>2 είναι θετικό οπότε η φορά της ανίσωσης θα έμενε ίδια και για x<2 είναι αρνητικό οπότε η φορά της ανίσωσης θα άλλαζε.Αντιθέτως εργαζόμαστε ως εξής (δες σχολικό σ. 152-153 και παρόμοιες ασκήσεις στην Α5 σ.154):

$$\frac{3x+2}{x-2}>2\Leftrightarrow\frac{3x+2}{x-2}-2>0\Leftrightarrow\frac{3x+2}{x-2}-\frac{2\left(x-2\right)}{x-2}>0\Leftrightarrow\frac{3x+2-2x+4}{x-2}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+6}{x-2}>0\Leftrightarrow\left(x+6\right)\left(x-2\right)>0$$

Το $\left(x+6\right)\left(x-2\right)$ είναι ένα τριώνυμο παραγοντοποιημένο και έτσι βλέπουμε αμέσως εξισώνοντας κάθε παράγοντα με το 0, ότι έχει 2 ρίζες τις x=-6 και x=2.

Επίσης ο συντελεστής του x^{2} είναι το 1>0.

Εμείς ζητάμε για ποιά x το τριώνυμο γίνεται θετικό δηλαδή ομόσημο του α=1>0 και όπως μάθαμε στην Α Λυκείου αυτό συμβαίνει για τα x που είναι έξω από τις ρίζες δηλαδή για $x<-6$ ή $x>2$ **(6)**

ώνiv) Οι κοινές λύσεις των **(5)** και **(6)** είναι $x\in\left(2,3\right)$

► Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με τύπους

$f(x)=\ln\left(2^{x+1}+3^{x}+2^{x}\right)$ και $g(x)=\dfrac{x+1}{2}\ln 9$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f,g. **(Μονάδες 10)**

β) να λυθεί η ανίσωση $f(x)>g(x)$. **(Μονάδες 15)**

<u>Λύση:</u>

Πρέπει $2^{x+1}+3^{x}+2^{x}>0$. Αυτό όμως ισχύει για κάθε x αφού $\alpha^{x}>0$ για κάθε x.

Αρα το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το R.(το σύνολο των πραγματικών αριθμών)

Επίσης και το πεδίο ορισμού της g είναι όλο το R.

$$\ln\left(2^{x+1}+3^{x}+2^{x}\right)>\frac{x+1}{2}\ln 9\Leftrightarrow\ln\left(2\cdot 2^{x}+3^{x}+2^{x}\right)>\frac{x+1}{2}\ln 3^{2}\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(3\cdot 2^{x}+3^{x}\right)>\frac{x+1}{2}2\ln 3\Leftrightarrow\ln\left(3\cdot 2^{x}+3^{x}\right)>(x+1)\ln 3\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(3\cdot 2^{x}+3^{x}\right)>\ln 3^{x+1}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}3\cdot 2^{x}+3^{x}>3^{x+1}\Leftrightarrow 3\cdot 2^{x}+3^{x}>3\cdot 3^{x}\Leftrightarrow$$

$$3\cdot 2^{x}>3\cdot 3^{x}-3^{x}\Leftrightarrow 3\cdot 2^{x}>2\cdot 3^{x}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x}>\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x}>\left(\frac{2}{3}\right)^{1}\overset{(2)}{\Leftrightarrow}x<1$$

Η ισοδυναμία (1) ισχύει επειδή η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Η ισοδυναμία (2) ισχύει επειδή η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα αφού $\dfrac{2}{3}<1$.