2_16962

Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης ***f***: ℝ→ ℝ διέρχεται από τα σημεία ***A***(5,2) και ***B***(4,9).

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της ***f*** αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση ***f(5-3x)*** < *2*. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) $f\left(5\right)=2$

$f\left(4\right)=9$

Αφού 2<9 είναι και $f\left(5\right)<f\left(4\right)$

Αρα για 4<5 έχουμε $f\left(5\right)<f\left(4\right)$ και δεδομένου ότι η f είναι γνησίως μονότονη, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσας

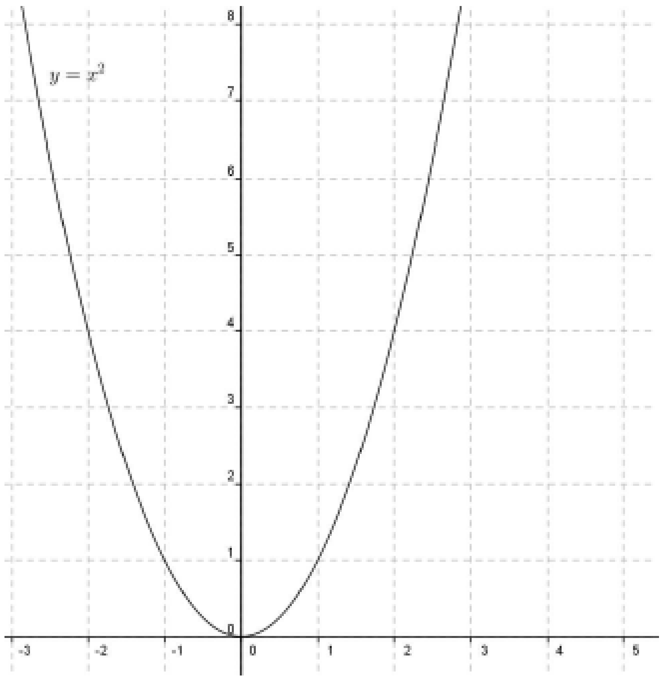
β) $f\left(5-3x\right)<2\Leftrightarrow f\left(5-3x\right)<f\left(5\right)\overset{f\ \text{γν. φθίνουσα}}{\Leftrightarrow}5-3x>5\Leftrightarrow -3x>0\Leftrightarrow x<0$

2_16965

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$. (Μονάδες 12)

β) Στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f, μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y = x^2$. (Μονάδες 13)



(Μονάδες 13)

Λύση:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$$

Αρα η γραφική παράσταση της f προκύπτει από την γραφική παράσταση της $y = x^2$ κατά 2 μονάδες οριζόντια δεξιά και μία μονάδα κατακόρυφα προς τα πάνω.

2_17688

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, με $x\in\Re$.

α) Να δείξετε ότι η $f(x)\le 1$. (Μονάδες 8)

β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 9)

Λύση:

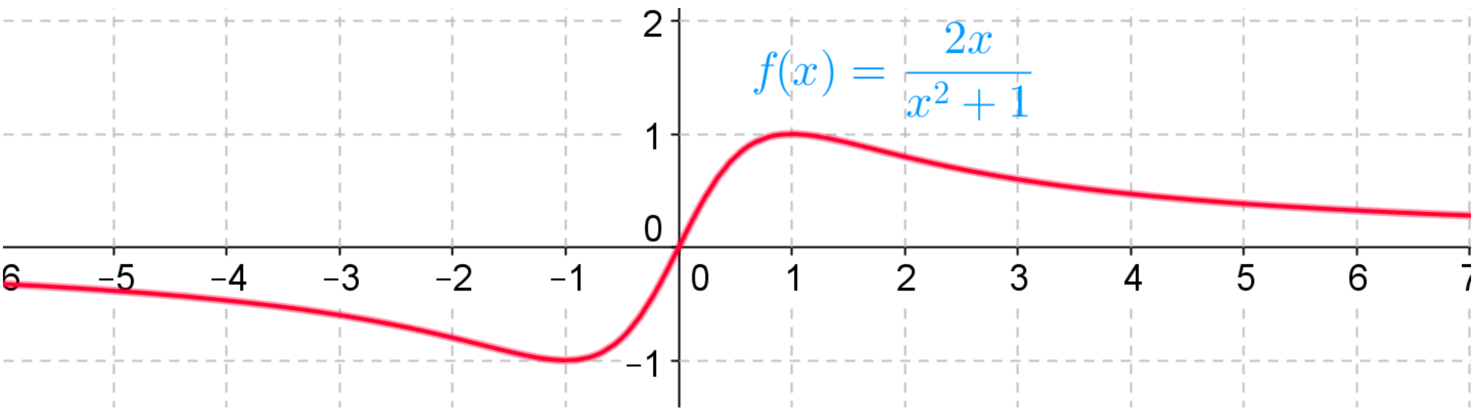
$f(x)\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+1}\le 1 \overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow} 2x\le x^2+1 \Leftrightarrow 0\le x^2-2x+1 \Leftrightarrow 0\le (x-1)^2$ που ισχύει, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Η τελευταία άρα και η ισοδύναμη αρχική ισχύει ως ισότητα για x=1.Επομένως πράγμαται το 1 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης την οποία παίρνει η συνάρτηση για x=1.

γ) Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$ οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=\frac{2(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{-2x}{x^2+1}=-\frac{2x}{x^2+1}=-f(x)$$

Αρα η συνάρτηση είναι περιττή.



Παρατηρούμε ότι ο άξονας x’x είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης.

2_17693

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_1)$, $f(x_2)$ και $f(x_3)$.

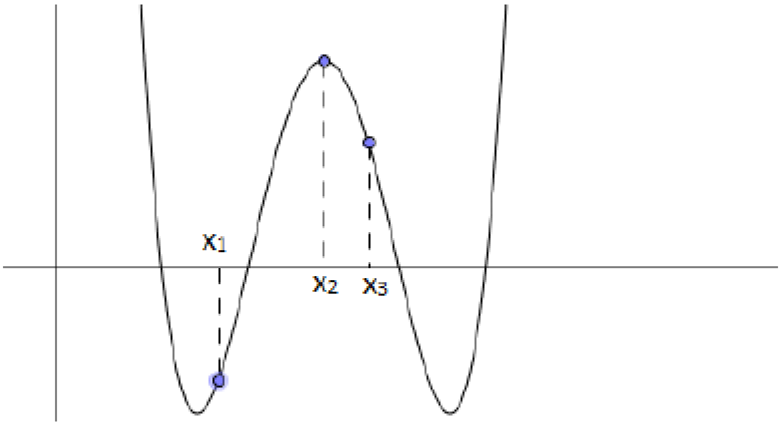
(Μονάδες 10)

β) Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 10)

γ) Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 5)



Λύση:

α) Από την γραφική παράσταση παρατηρώ ότι $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$

β) Οχι γιατί για $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$ ενώ για $x_2 < x_3$ είναι $f(x_2) > f(x_3)$

γ) Οχι γιατί υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης που βρίσκονται ψηλότερα από το $(x_2, f(x_2))$ που σημαίνει ότι έχουν μεγαλύτερη τεταγμένη.

<u>Σημείωση:</u> Παρουσιάζει όμως στο x_2 <u>τοπικό</u> μέγιστο.

2_17732

Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(4,5)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f. (Μονάδες 13)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2, να δείξετε ότι $f(0) > 0$.

(Μονάδες 12)

Λύση:

α) $f(3) = 2$

$f(4) = 5$

Επειδή $2 < 5$ είναι $f(3) < f(4)$

Αρα για 3<4 είναι $f(3) < f(4)$ και δεδομένου ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη συμπεραίνω ότι είναι γνησίως αύξουσα.

β) Το ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα στο -2 μεταφράζεται αλγεβρικά $f(-2) = 0$

Είναι -2<0 οπότε επειδή όπως δείξαμε η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$f(-2) < f(0) \Leftrightarrow 0 < f(0)$

2_18632

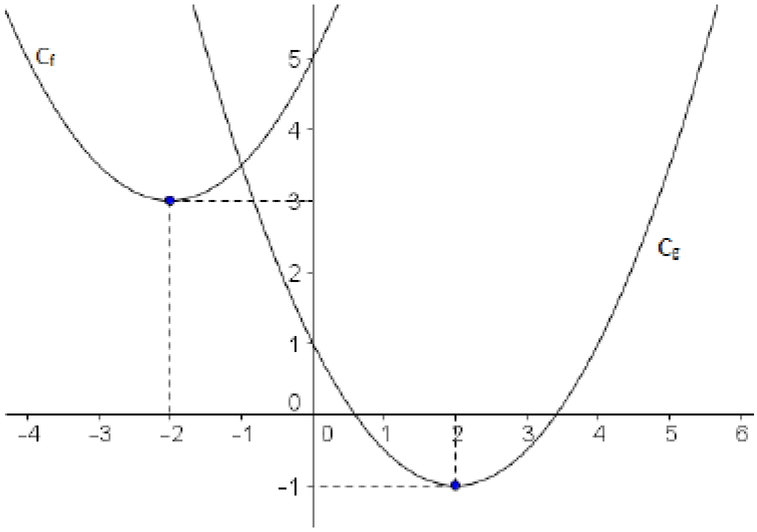
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Παρατηρώντας το σχήμα:

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g.

(Μονάδες 15)



Λύση:

α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-2, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο το y=3 για x=-2.

β) Οριζόντια μετατόπιση κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφη κατά 4 μονάδες προς τα κάτω.

2_18634

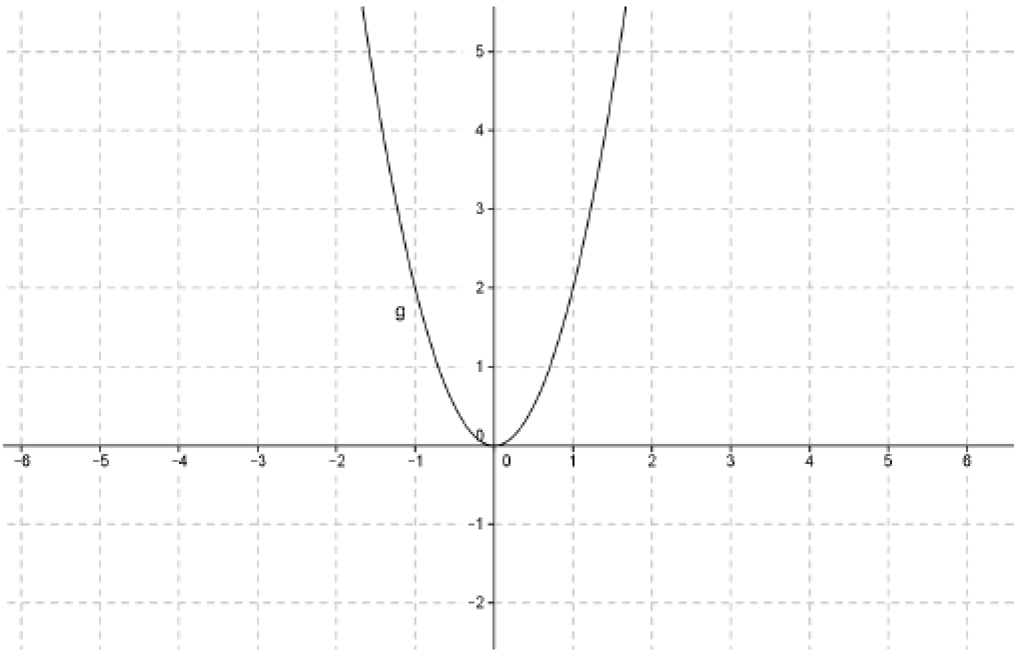
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή: $f(x)= 2(x-3)^2 + 1$.

(Μονάδες 10)

β) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 15)



Λύση:

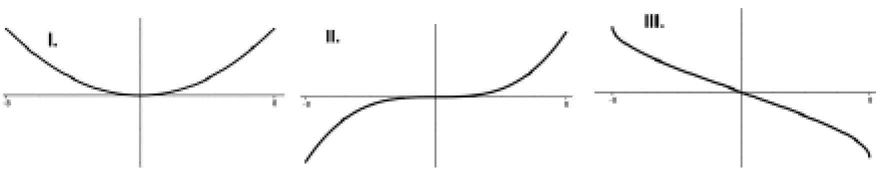
2_17833

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 8)

γ) Αν η συνάρτησης f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρείς προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.



(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $g(x)=f(x)-3$ και $h(x)=f(x+3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές.

(Μονάδες 5)

Λύση:

$$\left.\begin{matrix} 8-x\geq 0 \\ 8+x\geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 8\geq x \\ x\geq -8 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -8\leq x\leq 8$$

Αρα πεδίο ορισμού $\mathrm{A}=[-8,8]$.

Για κάθε $x\in\mathrm{A}$ $-x\in\mathrm{A}$ (το πεδίο ορισμού είναι συμμετρικό ως προς το 0) Αρα ικανοποιείται η πρώτη προυπόθεση:

$$f(x)=\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}$$

$$f(-x)=\sqrt{8-(-x)}-\sqrt{8+(-x)}=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}=-\left(\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}\right)$$

Αρα είναι περιττή.

γ) Το πρώτο διάγραμμα δεν είναι γιατί είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y, άρα άρτια και επίσης δεν είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού.Είανι το 3^{o}

Μέγιστη τιμή λαβαίνει για το μικρότερο x

Αρα $f_{\max} = f(-8) = \sqrt{8-(-8)} - \sqrt{8+(-8)} = \sqrt{8+8} - \sqrt{8+(-8)} = \sqrt{16} - \sqrt{0} = \sqrt{16} = 4$

και την ελάχιστη για το μεγαλύτερο x οπότε

$f_{\min} = f(8) = \sqrt{8-8} - \sqrt{8+8} = \sqrt{0} - \sqrt{16} = 0 - 4 = -4$

$-8 \le x \le 8 \Rightarrow f(8) \le f(x) \le f(-8) \Rightarrow -4 \le f(x) \le 4$

δ) ……

4_17842

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-c)^2-d,\ x\in\mathbb{R}$$

με $c,\ \ d$ <u>θετικές</u> σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(0,\ 16)$ και $B(4,\ 0)$.

α) Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους $c,\ \ d$ και να υπολογίσετε την τιμή τους. **(Μονάδες 10)**

β) Θεωρώντας γνωστό ότι $c = 6$ και $d = 2$,

i. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f *με* τους άξονες. **(Μονάδες 3)**

ii. να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

iii. με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f, τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα. **(Μονάδες 6)**

Λύση:

$$f(0)=16\Leftrightarrow\frac{1}{2}(0-c)^2-d=16\Leftrightarrow\frac{1}{2}c^2-d=16\Leftrightarrow c^2-2d=32\ \ (1)$$

$$f(4)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}(4-c)^2-d=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(16-8c+c^2\right)-d=0\Leftrightarrow$$

$$16-8c+c^2-2d=0\Leftrightarrow c^2-2d-8c+16=0$$

Αντικαθιστώντας από την $c^2-2d=32$ έχουμε

$$c^2-8c-2d-16=0\Leftrightarrow 32-8c+16=0\Leftrightarrow 8c=48\Leftrightarrow c=\frac{48}{8}=6$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε:

$$6^2-2d=32\Leftrightarrow 36-2d=32\Leftrightarrow -2d=-4\Leftrightarrow d=2.$$

Αρα $f(x)=\frac{1}{2}(x-6)^2-2$

Η γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{2}(x-6)^2-2$ προκύπτει όπως έχουμε μάθει από την γραφική παράσταση της $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ με:

α. Κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω κατά 2 μονάδες

β. Οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά κατά 6 μονάδες.

Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}(x-6)^2-2$ είναι :

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,6]$ και

γνησίως αύξουσα στο $[6,+\infty)$.

Παρουσιάζει ελάχιστο το -2 για x=6