ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΘΕΜΑΤΑ 2

16968, 17652, 17656, 17663, 17664, 17681, 17692, 17699, 17704, 17725, 17736, 17739, 17741

ΘΕΜΑΤΑ 4

17837, 17838, 17840, 17841, 17843, 17844

VERSION 23-11-2014 19:00

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

2_16968

α) Είναι η τιμή $x = \frac{\pi}{4}$ λύση της εξίσωσης $3\sigma\upsilon\nu 4x + 3 = 0$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu 4x$ με την ευθεία $y = -1$.

(Μονάδες 15)

Λύση:

Αντικαθιστώ στην εξίσωση όπου $x = \frac{\pi}{4}$ για να δώ αν θα πάρω σωστή ισότητα:

$$3\sigma\upsilon\nu 4\frac{\pi}{4} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu\pi + 3 = 0 \Leftrightarrow 3(-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow -3 + 3 = 0 \text{ που είναι αληθής}$$

β) Οι ζητούμενες τετμήμένες είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\sigma\upsilon\nu 4x = -1 \Leftrightarrow 4x = 2\kappa\pi + \pi \ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

2_17652

Δίνεται γωνία ω που ικανοποιεί τη σχέση:

$$(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι είτε $\eta\mu\omega = 0$ είτε $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω. (Μονάδες 12)

Λύση:

$$(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega}_{=1} + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\omega = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = \kappa\pi \ \kappa \in \mathbb{Z} \text{ ή}$$

$$\omega = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

2_17656

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}$ συν$2x$, $x\in\mathbb{R}$

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f;

(Μονάδες 9)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\omega x$ όπου ρ, ω>0 έχει μέγιστη τιμή ρ, ελάχιστη –ρ και περίοδο ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$ *Σχολικό σελίδα 81*

α) Η μέγιστη τιμή της είναι $\frac{1}{2}$ και η ελάχιστη $-\frac{1}{2}$.

Η περίοδος της συνάρτησης είναι $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

γ) Δεν μπορεί αφού παίρνει τιμές από $-\frac{1}{2}$ έως $\frac{1}{2}$.

2_17663

Αν $0<x<\frac{\pi}{2}$ και $(2\sigma\upsilon\nu x+1)\cdot(5\sigma\upsilon\nu x-4)=0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu x=\frac{4}{5}$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x. (Μονάδες 15)

Λύση:

α) $(2\sigma\upsilon\nu x+1)(5\sigma\upsilon\nu x-4)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x+1=0$ ή $5\sigma\upsilon\nu x-4=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu x=\frac{4}{5}$

Επειδή $0<x<\frac{\pi}{2}$ είναι $\sigma\upsilon\nu x>0$ οπότε η ρίζα $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}$ απορρίπτεται και η μόνη αποδεκτή είναι η

$\sigma\upsilon\nu x=\frac{4}{5}$

β) $\eta\mu^2 x=1-\sigma\upsilon\nu^2 x=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{25-16}{25}=\frac{9}{25}$

Επειδή $0<x<\frac{\pi}{2}$ είναι $\eta\mu x>0$

Αρα $\eta\mu x=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

$\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

$\sigma\varphi x=\frac{4}{3}$

2_17664

Δίνονται οι γωνίες ω, ϑ για τις οποίες ισχύει:

$$\omega + \vartheta = 135^\circ.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\varepsilon\varphi(\omega + \vartheta) = -1$ (Μονάδες 10)

β) $\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\vartheta + 1 = \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\vartheta$ (Μονάδες 15)

Λύση:

α) $\varepsilon\varphi(\omega+\theta) = \varepsilon\varphi 135^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = -\varepsilon\varphi 45^\circ = -1$

β) Γνωρίζουμε ότι: $\varepsilon\varphi(\omega+\theta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta}{1 - \varepsilon\varphi\omega\varepsilon\varphi\theta}$ σ.92 σχολικού

Αρα $-1 = \dfrac{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta}{1 - \varepsilon\varphi\omega\varepsilon\varphi\theta} \overset{\text{χιαστί}}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta = -1 + \varepsilon\varphi\omega\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta + 1 = \varepsilon\varphi\omega\varepsilon\varphi\theta$

Για να ισχύει ο τύπος πρέπει $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \Leftrightarrow \omega \neq \kappa \cdot 90^\circ$ $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0 \Leftrightarrow \theta \neq \kappa \cdot 90^\circ$ $\kappa \in \mathbb{Z}$

2_17681

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

(Μονάδες 15)

Λύση:

α) Μέγιστη τιμή όταν ημx=1 οπότε $\max f(x) = 3$ και ελάχιστη όταν ημx=-1 οπότε $\min f(x) = -1$

β) Μέγιστη τιμή παρουσιάζει για x για το οποίο ημx=1 δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{2}$.

2_17692

α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu(\frac{\pi}{2}+x)+\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0,2\pi)$ για τις οποίες ισχύει: $\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu(\frac{\pi}{2}+x)$.

(Μονάδες 15)

Λύση:

α) $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)-\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu(-x)-\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x=0$

β) $\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$

2_17693

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}\quad .$$

(Μονάδες 12)

β) Αν $\pi<x_1<x_2<\frac{3\pi}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\eta\mu(\frac{\pi}{2}-x_1)$ και $\eta\mu(\frac{\pi}{2}-x_2)$.

(Μονάδες 13)

Λύση:

α) $\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}=\sigma\upsilon\nu\left(2\pi-\frac{3\pi}{10}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{3\pi}{10}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{10}$

$\frac{1}{4}<\frac{3}{10}\Leftrightarrow 10<12$ που ισχύει.Αρα $\frac{1}{4}<\frac{3}{10}$ οπότε:

$\frac{1}{6}<\frac{1}{4}<\frac{3}{10}$

Η συνάρτηση συνx είναι γνησίως φθίνουσα στο $0<x<\pi$ *(όπως διαπιστώνουμε από τον τριγωνομετρικό κύκλο)*

οπότε $\sigma\upsilon\nu\frac{3}{10}<\sigma\upsilon\nu\frac{1}{4}<\sigma\upsilon\nu\frac{1}{6}$

β) $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)=\sigma\upsilon\nu x_1$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)=\sigma\upsilon\nu x_2$

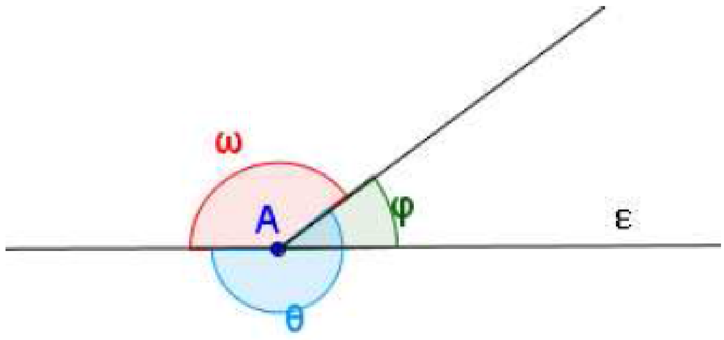
Στο $\left[\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα *(όπως διαπιστώνουμε από τον τριγωνομετρικό κύκλο)* οπότε από

$\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu x_1 < \sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right) < \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)$$

2_17699

Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών ϑ και ω του σχήματος.

(Μονάδες 15)

Λύση:

$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 - \eta\mu^2\varphi = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Επειδή φ οξεία δηλαδή $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi > 0$ οπότε $\sigma\upsilon\nu\varphi = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

β) • θ=180°+φ επομένως όπως γνωρίζουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu(180° + \varphi) = -\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{3}{5}$$

$$\eta\mu\theta = \eta\mu(180° + \varphi) = -\eta\mu\varphi = -\frac{4}{5}$$

• ω=180°-φ επομένως όπως γνωρίζουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu(180° - \varphi) = -\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{3}{5}$$

$$\eta\mu\omega = \eta\mu(180° - \varphi) = \eta\mu\varphi = \frac{4}{5}$$

2_17704

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3συν2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f. (Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$συν2x$					
$f(x) = -3συν2x$					

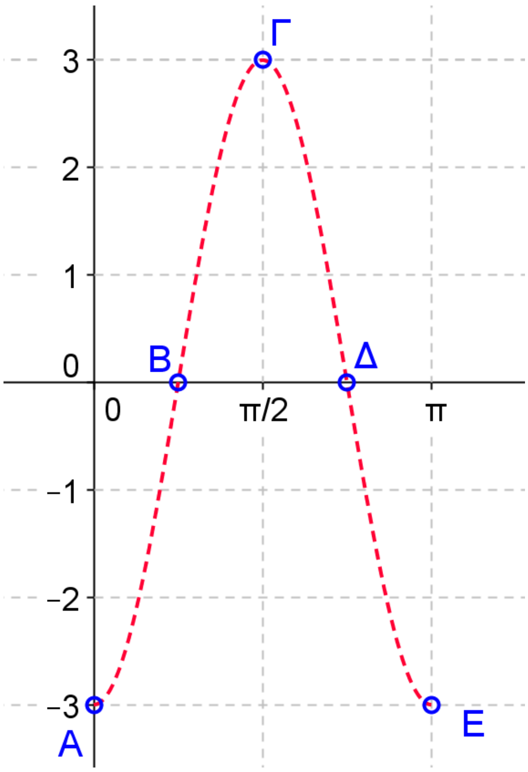
(Μονάδες 13)

Λύση:

α) Περίοδος $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, μέγιστη τιμή 3 και ελάχιστη τιμή -3.

β)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συν2x	1	0	-1	0	1
$f(x) = -3συν2x$	-3	0	3	0	-3



2_17725

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu(\pi-3x)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-3x\right), x\in\mathbb{R}$.

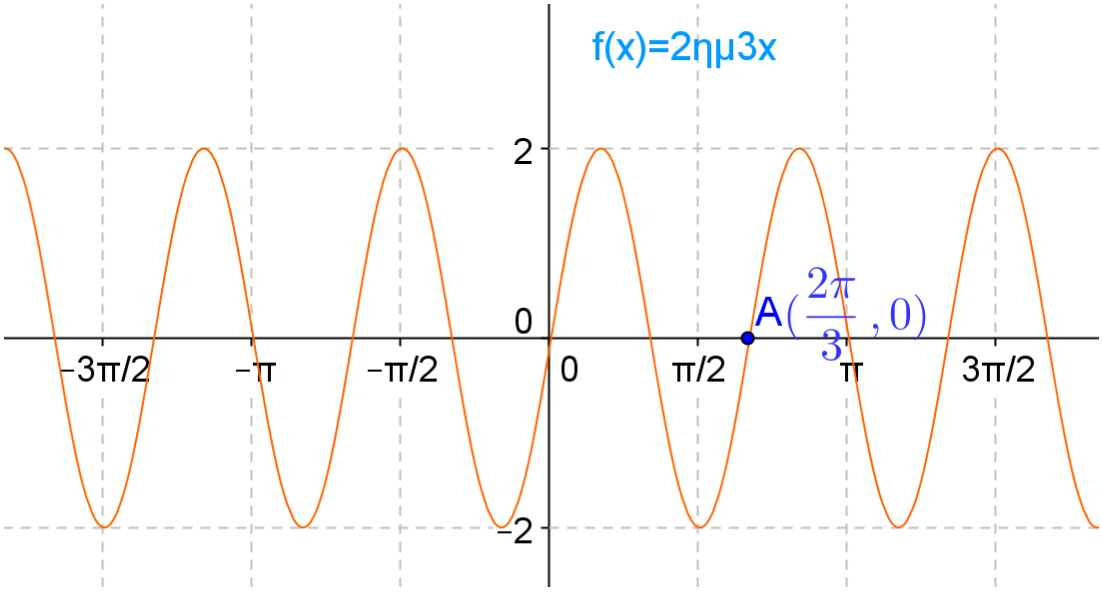
α) Να δείξετε ότι $f(x)=2\eta\mu 3x$. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 15)

Λύση:

α) $f(x)=\eta\mu(\pi-3x)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\eta\mu(3x)+\eta\mu(3x)=2\eta\mu 3x$

β)



2_17736

Δίνεται η παράσταση: $A = \dfrac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$, με $x \neq 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1+\sigma\upsilon\nu x$ (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{1}{2}$ στο διάστημα $(0,\ 2\pi)$. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) $\mathrm{A} = \dfrac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu x} = 1+\sigma\upsilon\nu x$

β) $\dfrac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 1+\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \dfrac{1}{2}-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}$

Από τον τριγωνομετρικό κύκλο και τους τύπους αναγωγής στο $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο συμπεραίνουμε ότι λύσεις της εξίσωσης στο διάστημα $(0,\ 2\pi)$ είναι $x = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ καθώς και $x = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$.

2_17739

Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu(\pi + x) = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την γωνία x. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) $\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu(\pi + x) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x - (-\eta\mu x) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x + \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2}$

β) Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.Γνωρίζουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίδια ημίτονα.Αρα λύση που να ανήκει στο $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι η $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

2_17741

α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{2}{\eta\mu x}$, όπου $x\neq\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ (Μονάδες 12)

Λύση:

α) $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\eta\mu x\left(\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)=\eta\mu x\frac{1+\sigma\upsilon\nu x+1-\sigma\upsilon\nu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}=$

$=\eta\mu x\frac{2}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{2\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}=\frac{2}{\eta\mu x}$

β) $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{4}{\sqrt{3}}\overset{\alpha)}{\Leftrightarrow}\frac{2}{\eta\mu x}=\frac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{\eta\mu x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\eta\mu x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{3}$

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{3}\end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

4_17837

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|\ a+1\ |\ \eta\mu(\beta\pi x)$ με $a\in\Re$ και $\beta>0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

α) Να δείξετε ότι $a=2$ ή $a=-4$ και $\beta=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)

β) Για $a=2$ και $\beta=\frac{1}{2}$,

i. να λυθεί η εξίσωση $f(x)=3$. (Μονάδες 10)

ii. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα [0, 8].

(Μονάδες 8)

Λύση:

α) Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή είναι $|\alpha+1|$.Ετσι έχουμε:

$|\alpha+1|=3\Leftrightarrow\alpha+1=3$ ή $\alpha+1=-3\Leftrightarrow\alpha=2$ ή $\alpha=-4$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι η περίοδος είναι $\frac{2\pi}{\beta\pi}=\frac{2}{\beta}$.Αρα από τα δεδομένα έχουμε

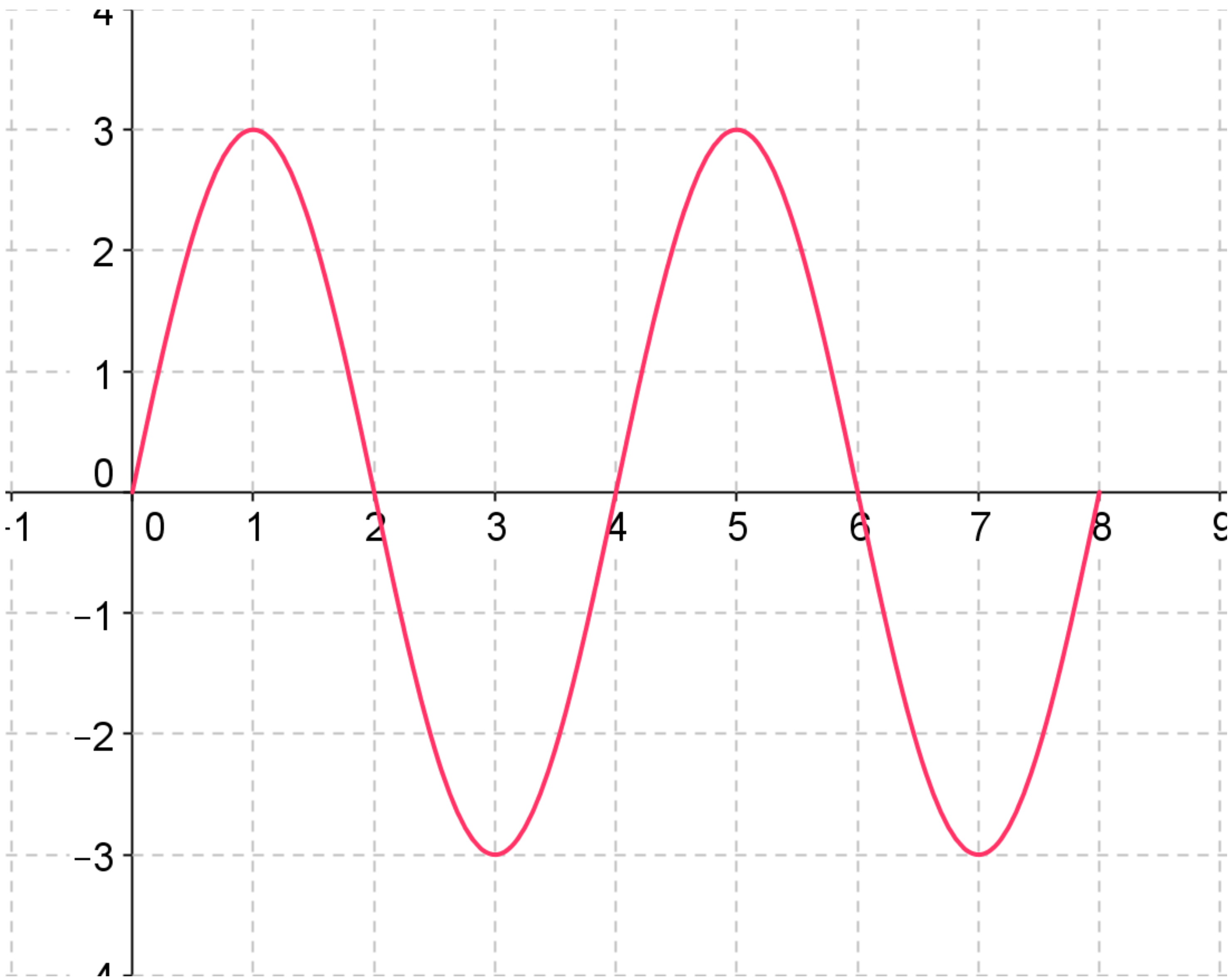
$\frac{2}{\beta}=4\Leftrightarrow\beta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

β) i) Για α=2 και $\beta=\frac{1}{2}$ έχουμε:

$f(x)=3\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ οπότε:

$f(x)=3\Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=3\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1\Leftrightarrow\frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ $\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=2\kappa+\frac{1}{2}$ $\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=4\kappa+1,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

ii) Αφού η περίοδος είναι 4 μας ζητείται η γραφική παράσταση σε διάστημα δύο περιόδων:


4
3
2
1
0
−1
−2
−3
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

4_17838

Για τη γωνία ω ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu2\omega + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 21 = 0$.

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$. (Μονάδες 10)

β) Αν για τη γωνία ω επιπλέον ισχύει $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, τότε:

i. να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu2\omega = \frac{7}{25}$ και $\eta\mu2\omega = -\frac{24}{25}$. (Μονάδες 8)

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{13\cdot[\eta\mu^2 2\omega + \sigma\upsilon\nu^2 2\omega] + 12}{18\cdot \varepsilon\varphi2\omega\cdot\sigma\varphi2\omega + 25[\eta\mu2\omega + \sigma\upsilon\nu2\omega]}.$$ (Μονάδες 7)

Λύση:

$$5\sigma\upsilon\nu2\omega + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 21 = 0 \Leftrightarrow 5\left(2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1\right) + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 21 = 0 \Leftrightarrow 10\sigma\upsilon\nu^2\omega + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5\sigma\upsilon\nu^2\omega + 14\sigma\upsilon\nu\omega + 8 = 0$$

$\alpha = 5$

$\beta = 14$

$\gamma = 8$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 14^2 - 4\cdot5\cdot8 = 196 - 160 = 36$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-14\pm\sqrt{36}}{2\cdot5} = \frac{-14\pm6}{10}$$

$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{-14-6}{10} = \frac{-20}{10} = -2$ απορρίπτεται γιατί ως γνωστόν $-1 \le \sigma\upsilon\nu\omega \le 1$

ή

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{-14+6}{10} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}$$

β) $\sigma\upsilon\nu2\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1 = 2\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = 2\frac{16}{25} - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{32}{25} - \frac{25}{25} = \frac{7}{25}$

$$\eta\mu^2 2\omega = 1-\sigma\upsilon\nu^2 2\omega = 1-\left(\frac{7}{25}\right)^2 = 1-\frac{49}{625} = \frac{625-49}{625} = \frac{576}{625}$$

Δίνεται ότι $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi \Leftrightarrow 2\frac{\pi}{2} < 2\omega < 2\pi \Leftrightarrow \pi < 2\omega < 2\pi$ οπότε $\eta\mu 2\omega < 0$ οπότε από την

$\eta\mu^2 2\omega = \frac{576}{625}$ παίρνουμε $\eta\mu 2\omega = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$

$$\Pi = \frac{13\left[\eta\mu^2 2\omega + \sigma\upsilon\nu^2 2\omega\right]+12}{18\varepsilon\varphi 2\omega \cdot \sigma\varphi 2\omega + 25\left[\eta\mu 2\omega + \sigma\upsilon\nu 2\omega\right]} = \frac{13\cdot 1+12}{18\cdot 1+25\left[-\frac{24}{25}+\frac{7}{25}\right]} = \frac{25}{18+25\frac{-17}{25}} = \frac{25}{18-17} = 25$$

4_17840

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} -x+2y=1 \\ x+\lambda y=\lambda \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Αν $\lambda = -1$ και (x_0, y_0) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να βρείτε γωνία $\vartheta \in [0, 2\pi)$ τέτοια ώστε $x_0 =$ συνϑ και $y_0 =$ ημϑ. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $x_1 =$ συνω και $y_1 =$ ημω. (Μονάδες 8)

Λύση:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda - 2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2\lambda = -\lambda$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda - 1$$

Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow -\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -2$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-\lambda}{-\lambda-2} = \frac{\lambda}{\lambda+2}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-\lambda-1}{-\lambda-2} = \frac{\lambda+1}{\lambda+2}$$

Για $\lambda = -2$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -x+2y=1 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ x-2y=-2 \end{cases}$$ που είναι αδύνατο.

β) Για λ=-1 έχουμε σύστημα με λύση $\left(\frac{-1}{-1+2}, \frac{-1+1}{-1+2}\right) = \left(\frac{-1}{1}, \frac{0}{1}\right) = (-1, 0)$ και γυρεύουμε γωνία θ με συνθ=-1 και ημθ=0.Στο διάστημα $[0, 2\pi]$ τέτοια γωνία είναι η θ=π.

Για λ=1 έχουμε σύστημα με λύση $\left(\frac{1}{1+2}, \frac{1+1}{1+2}\right)=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Αν υπήρχε γωνία θ με $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{3}$ και $\eta\mu\theta=\frac{2}{3}$ τότε από την ταυτότητα $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$

θα ίσχυε:

$\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{4}{9}+\frac{1}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{5}{9}=1$ άτοπο.

4_17841

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή $t \ sec$ δίνεται από τη συνάρτηση: $h(t) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right)$, $0 \leq t \leq 180$.

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος. **(Μονάδες 8)**

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας. **(Μονάδες 3)**

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

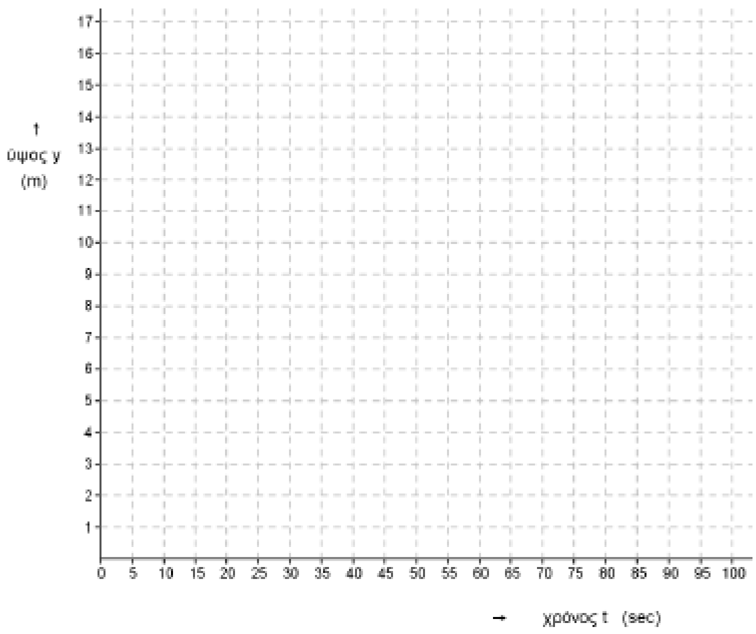
(Μονάδες 4+2=6)

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$. **(Μονάδες 3)**

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$. **(Μονάδες 5)**

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$							



Λύση:

α) Το μέγιστο ύψος επιτυγχάνεται όταν $\eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right) = 1$ δηλαδή όταν

$$\frac{\pi \cdot t}{30} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{t}{30} = 2\kappa + \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = 60\kappa + 15$$ και επειδή $0 \leq t \leq 180$ έχουμε:

$$0 \le 60\kappa + 15 \le 180 \Leftrightarrow -15 \le 60\kappa \le 165 \Leftrightarrow -\frac{15}{60} \le \kappa \le \frac{165}{60} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le \kappa \le 2 + \frac{45}{60} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le \kappa \le 2 + \frac{9}{12}$$

Αρα κ=0 ή κ=1 ή κ=2 οπότε t=15 ή t=75 ή t=135

β) Η διάμετρος της ρόδας είναι η διαφορά του ελάχιστου από το μέγιστο ύψος 14-2=12

οπότε η ακτίνα της ρόδας είναι 6 m

γ) Η περίοδος της ρόδας είναι $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{30}} = 60 \text{ sec}$.Αρα σε 180 sec οι φίλες έκαναν 3 γύρους.

δ)

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)	8	14	8	2	8	14	8

$$h(t) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right)$$

$$h(0) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot 0}{30}\right) = 8 + 6 \cdot \eta\mu 0 = 8 + 0 = 8$$

$$h(15) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot 15}{30}\right) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 + 6 \cdot 1 = 14$$

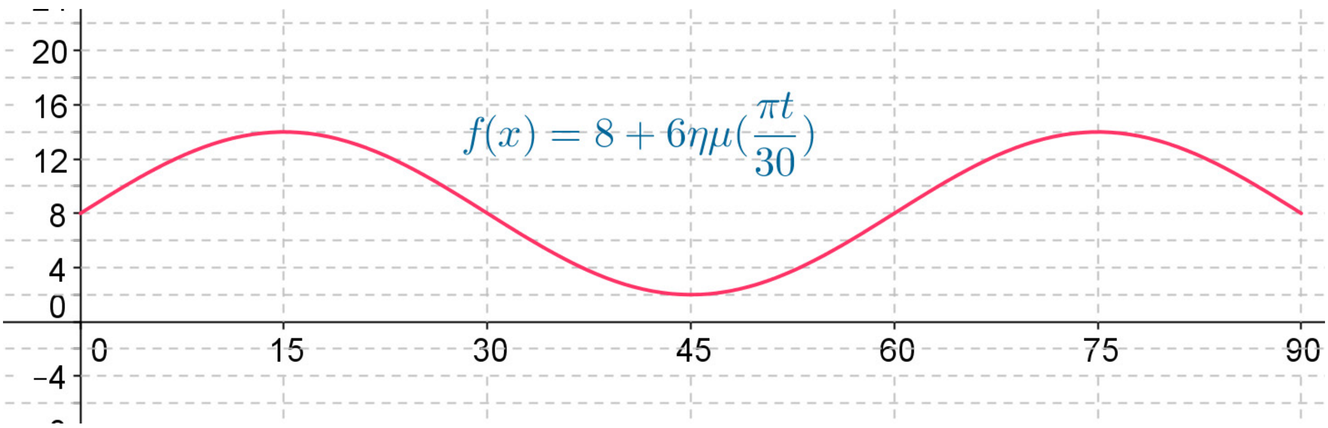
$$h(30) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot 30}{30}\right) = 8 + 6 \cdot \eta\mu(\pi) = 8 + 6 \cdot 0 = 8$$

$$h(45) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot 45}{30}\right) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 8 + 6 \cdot (-1) = 2$$

$$h(60) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot 60}{30}\right) = 8 + 6 \cdot \eta\mu(2\pi) = 8 + 6 \cdot 0 = 8$$

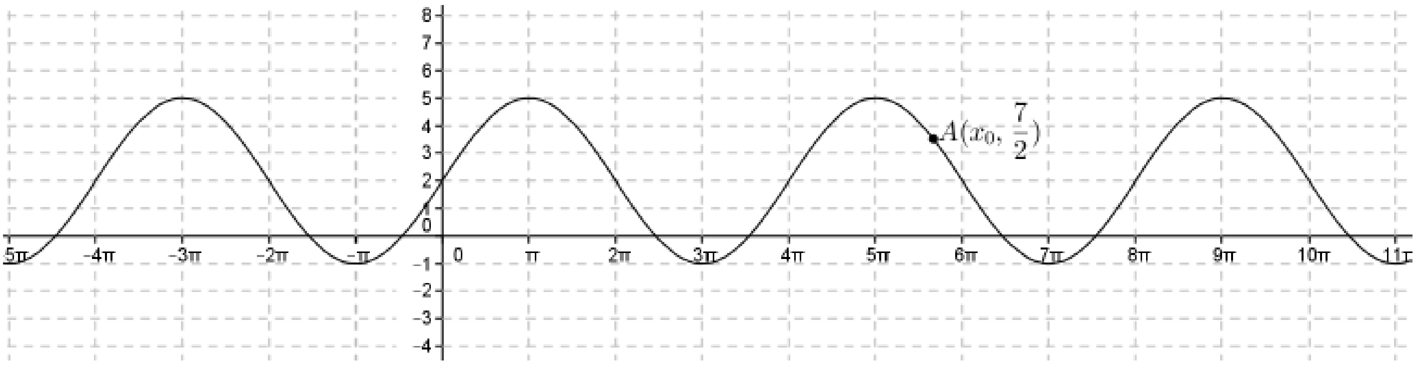
$$h(75) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot 75}{30}\right) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 8 + 6 \cdot 1 = 14$$

$$h(90) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot 90}{30}\right) = 8 + 6 \cdot \eta\mu(3\pi) = 8 + 6 \cdot \eta\mu(2\pi + \pi) = 8 + 6 \cdot 0 = 8$$



4_17843

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + k$, με ρ, ω, k πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f (Μονάδες 3)

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f (Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω και k. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3$, $\omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$, να προσδιορίσετε **αλγεβρικά** την τετμημένη x_0 του σημείου A της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα. (Μονάδες 10)

Λύση:

Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης παρατηρώ ότι:

Μέγιστη τιμή: 5

Ελάχιστη τιμή: -1

Περίοδος: Τ=4π

$$\begin{cases} 5 = \rho + k \\ -1 = -\rho + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2k \\ -1 = -\rho + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ -1 = -\rho + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ \rho = 3 \end{cases}$$

$$\frac{2\pi}{\omega} = 4\pi \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}$$

$$3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right) + 2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{7}{2} - 2 \Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{7}{2} - \frac{4}{2} \Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \text{ή}\\ \frac{x}{2}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \text{ή}\\ \frac{x}{2}=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\\ \text{ή}\\ x=4\kappa\pi+\frac{5\pi}{3}\end{cases}\kappa\in\mathbb{Z}$$

Επειδή το x_0 βρίσκεται μεταξύ 5π και 6π συμπεραίνουμε ότι παίρνουμε το x_0 από τον τύπο

$x=4\kappa\pi+\frac{5\pi}{3}$ για κ=0, οπότε: $x_0=\frac{5\pi}{3}$

4_17844

α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω με $0 \le \omega \le 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση

$$συνω + ημω = -1$$

και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. (Μονάδες 13)

Λύση:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+(-x-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+(x+1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+x^2+2x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ 2x^2+2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x=0 \text{ ή } x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x=0 \text{ ή } x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-x-1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Αρα λύσεις είναι τα ζεύγη $(0,1)$ και $(-1,0)$.

Επειδή για κάθε γωνία ω ισχύει $συν^2\omega+ημ^2\omega=1$, τα συνω και ημω είναι λύσεις του δοθέντος συστήματος, δηλαδή οι ζητούμενες γωνίες έχουν:

$$\begin{cases} ημ\omega=-1 \\ συν\omega=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} ημ\omega=0 \\ συν\omega=-1 \end{cases}$$

Στο $[0,\ 2\pi]$ τέτοιες γωνίες είναι οι ω=π και $\omega=\frac{3\pi}{2}$

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

4_17846

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = συνx$ και $g(x) = συν2x$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$, για $x \in [0, 2π]$.

(Μονάδες 8)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$									
$g(x)$									

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

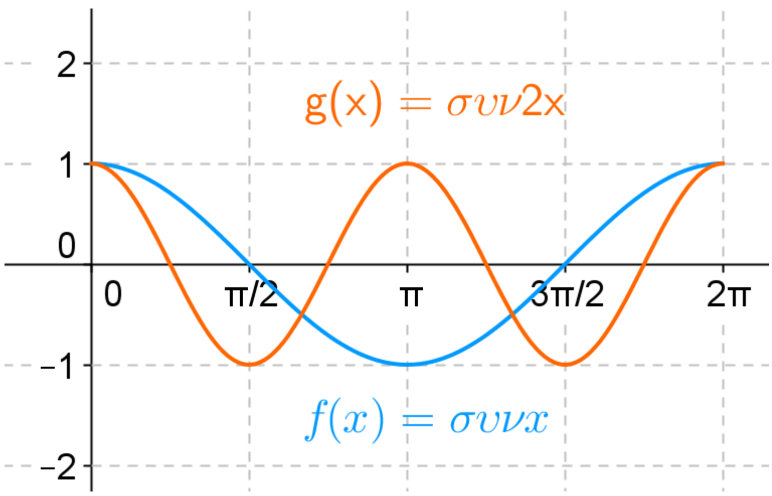
$$συν2x = συνx \qquad (1)$$

στο διάστημα [0, 2π]. (Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα [0, 2π] και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 13)

Λύση:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x) = συνx$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$g(x) = συν2x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1



Στο **Geogebra** η σχεδίαση της g(x)=συν2x μόνο στο [0,2π], γίνεται με την εντολή Function[cos(2x),0,2π].

Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $συν2x = συνx$ στο διάστημα [0,2π] όπως βλέπουμε από τις γραφικές παραστάσεις είναι 4.

Αλγεβρική επίλυση:

$$συν2x = συνx \Leftrightarrow 2συν^2x - 1 = συνx \Leftrightarrow 2συν^2x - συνx - 1 = 0$$

α=2

β= -1

γ= -1

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 2(-1) = 1 + 8 = 9$$

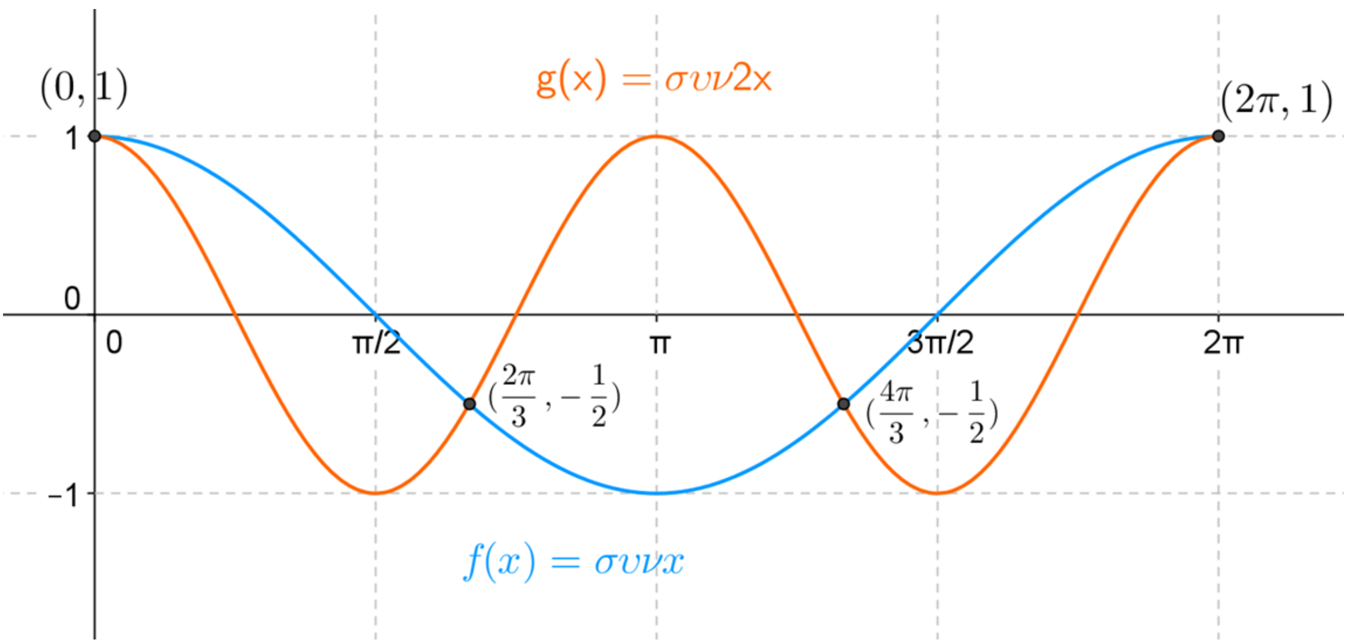
$$συνx = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$ οπότε:

$$συνx = \frac{1+3}{4} \text{ ή } συνx = \frac{1-3}{4} \Leftrightarrow συνx = \frac{4}{4} \text{ ή } συνx = \frac{-2}{4} \Leftrightarrow συνx = 1 \text{ ή } συνx = -\frac{1}{2}$$

Στο διάστημα $[0,\ 2\pi]$ έχουμε:

$$συνx = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2\pi$$

$$συνx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx = -συν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} \text{ ή } x = \pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ή } x = \frac{4\pi}{3}$$



4_17852

Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε *cm* συναρτήσει του χρόνου *t* (sec) δίνεται από τη σχέση:

$$h(t)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t)+\beta, \quad \text{όπου } \alpha,\ \omega,\ \beta \text{ πραγματικές σταθερές.}$$

Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι *20cm* και το μέγιστο *100cm*. Τη χρονική στιγμή *t=0* το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-ηρεμία-ελάχιστο) είναι *6 sec*.

α) Να δείξετε ότι $\omega=\dfrac{\pi}{3}$. (Μονάδες 5)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των *α* και *β* αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιγνιδιού από το πάτωμα *14sec* μετά την έναρξη της ταλάντωσης. (Μονάδες 8)

δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης *h(t)*, για $0 \le t \le 12$. (Μονάδες 6)

Λύση: *(με κόκκινο από mathematica)*

α) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\omega x$ όπου ρ, ω>0 έχει μέγιστη τιμή ρ, ελάχιστη –ρ και περίοδο ίση με $\dfrac{2\pi}{\omega}$ *(Σχολικό σελίδα 81)*

Αρα $T=6\sec \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{\omega}=6 \Leftrightarrow \omega=\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$

β) $h(0)=20 \Rightarrow \alpha\sigma\upsilon\nu(\omega 0)+\beta=20 \Leftrightarrow a\cdot 1+\beta=20 \Leftrightarrow a+\beta=20$

Μετά από 3 sec θα βρίσκεται προφανώς στο μέγιστο ύψος οπότε

$$h(3)=100 \Rightarrow \alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}3\right)+\beta=100 \Leftrightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\pi+\beta=100 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=100$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις

$$2\beta=120 \Leftrightarrow \beta=60$$

οπότε α=-40 και $h(t)=-40\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)+60$

γ) $h(14) = -40\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}14\right) + 60 = -40\sigma\upsilon\nu\left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + 60 = -40\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 60 =$

$-40\left(-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + 60 = 40\frac{1}{2} + 60 = 20 + 60 = 80$

***<u>Σημείωση</u>**: Στις λύσεις του Mathematica γράφει* $h(14) = h(2T + 2) = h(2)$

δ) Αρα δύο περιόδων

4_17855

Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(\mathrm{t}) = 12\eta\mu\frac{\pi\,\mathrm{t}}{4} + 13, \quad \text{όπου } t \text{ ο χρόνος σε ώρες.}$$

α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t = 5$ και $t = 8$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 8$, ποιά χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

(Μονάδες10)

Λύση:

α) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \rho\eta\mu\omega x$ όπου ρ, ω>0 έχει μέγιστη τιμή ρ, ελάχιστη –ρ και περίοδο ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$ (*Σχολικό σελίδα 81)*

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8\pi}{\pi} = 8$ ώρες

β) $f(t) = 12\eta\mu\frac{\pi t}{4} + 13$ άρα

$$f(5) = 12\eta\mu\frac{\pi 5}{4} + 13 = 12\eta\mu\frac{5\pi}{4} + 13 = 12\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 13 = 12\left(-\eta\mu\frac{\pi}{4}\right) + 13 = -12\frac{\sqrt{2}}{2} + 13 = -6\sqrt{2} + 13$$

$$f(8) = 12\eta\mu\frac{\pi 8}{4} + 13 = 12\eta\mu\frac{8\pi}{4} + 13 = 12\eta\mu 2\pi + 13 = 12 \cdot 0 + 13 = 13$$

Η απόσταση γίνεται ελάχιστη όταν $\eta\mu\frac{\pi t}{4} = -1$

$0 < t < 8 \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{4}t < \frac{\pi}{4}8 \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi t}{4} < 2\pi$ άρα $\eta\mu\frac{\pi t}{4} = -1$ έχουμε για $\frac{\pi t}{4} = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{t}{2} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow t = 6$

$f(6) = -12 + 13 = 1$.