Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Εχουμε μάθει να λύνουμε εξισώσεις πρώτου βαθμού και δευτέρου βαθμού που είναι ισότητες που περιέχουν έναν άγνωστο και προσπαθούμε να βρούμε για ποιά (ή ποιές) τιμές αυτού του αγνώστου παίρνουμε μια σωστή (αληθή) ισότητα.

Τωρα μιλάμε για **τριγωνομετρικές εξισώσεις**.Από την λέξη εξισώσεις καταλαβαίνουμε ότι και εδώ θα πρέπει να υπολογίσουμε κάποιον *«άγνωστο x»*. Ο επιθετικό προσδιορισμός *τριγωνομετρικές* σε τί άραγε να αναφέρεται; Αναφέρεται στο ότι εμφανίζεται όχι «σχέτο» x, αλλά κάποιος τριγωνομετρικός αριθμός του x.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση

$$\eta\mu x = \frac{1}{2}$$

Μας ζητούνται οι γωνίες (θα δουλεύουμε σε rad) που έχουν ημίτονο $\frac{1}{2}$.Γνωρίζουμε ότι μια τέτοια γωνία είναι η $\frac{\pi}{6}$.Αρα λύθηκε η εξίσωση? Οχι πλήρως, γιατί δεν είναι μόνο αυτή η γωνία λύση.Εχουμε μάθει ότι οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίδιο ημίτονο.Αρα μια ακόμα λύση είναι η $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Αρα τελειώσαμε? Οχι γιατί έχουμε πεί ότι γωνίες που έχουν την ίδια τελική πλευρά έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς και τέτοιες γωνίες προκύπτουν αν ο ημιάξονας O*x* κάνει κατά την θετική ή αρνητική φορά μια ή περισσότερες περιστροφές και διαγράψει επιπλέον και μια γωνία x rad

Τότε οι γωνίες 2π+x, 2·2π+x, 3·2π+ω, 4·2π+x ,..... καθώς και οι –2π+x , –2·2π+x, –3·2π+x, –4·2π+x... έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με την x.

Ολες αυτές οι γωνίες μπορούν να περιγραφούν συνοπτικά με τον συμβολισμό:

κ·2π+x, $\kappa \in \mathbb{Z}$ (διαβάζουμε : όπου κ ανήκει στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$).

Συνηθίζουμε να γράφουμε το κ·2π ως 2κπ.

Επομένως λύσεις τις εξίσωσης είναι οι

$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$ οι $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$

►Γενικότερα για να λύσουμε μια εξίσωση της μορφής $\eta\mu x = \alpha$, αρκεί να βρούμε μια <u>οποιαδήποτε</u> γωνία θ που να έχει $\eta\mu\theta = \alpha$, οπότε η εξίσωση γράφεται $\eta\mu x = \eta\mu\theta$, και οι λύσεις της δίνονται από τους τύπους:

$x = 2\kappa\pi + \theta$

ή $\kappa \in \mathbb{Z}$

$x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$

Σκεφτόμενοι παρόμοια καταλήγουμε στο ότι:

►Για να λύσουμε μια εξίσωση της μορφής $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$, αρκεί να βρούμε μια οποιαδήποτε γωνία θ που να έχει $\sigma\upsilon\nu\theta = \alpha$, οπότε η εξίσωση γράφεται $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta$, και οι λύσεις της δίνονται από τους τύπους:

$x = 2\kappa\pi + \theta$

ή $\quad\quad$ $\kappa \in \mathbb{Z}$

$x = 2\kappa\pi - \theta$

► Για να λύσουμε μια εξίσωση της μορφής $\varepsilon\phi x = \alpha$, αρκεί να βρούμε μια οποιαδήποτε γωνία θ που να έχει $\varepsilon\phi\theta = \alpha$, οπότε η εξίσωση γράφεται $\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi\theta$, και οι λύσεις της δίνονται από τους τύπους:

$x = \kappa\pi + \theta \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

► Για να λύσουμε μια εξίσωση της μορφής $\sigma\phi x = \alpha$, αρκεί να βρούμε μια οποιαδήποτε γωνία θ που να έχει $\sigma\phi\theta = \alpha$, οπότε η εξίσωση γράφεται $\sigma\phi x = \sigma\phi\theta$, και οι λύσεις της δίνονται από τους τύπους:

$x = \kappa\pi + \theta \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

Προσοχή! Στην $\varepsilon\phi x = \alpha$ και $\sigma\phi x = \alpha$ δεν έχουμε δύο τύπους λύσεων αλλά έναν.Ομως προσέξτε ότι αντί για 2κπ *(που έχει ο τύπος λύσεων ημ και συν)* έχουμε κπ .

Ειδικές περιπτώσεις: (*σχολικό Α1 i) και iii), Α2 ii) και iv), Α5 i) και ii)*)

- $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

- $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

***

- $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
- $\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Πως μπορεί αλήθεια κάποιος να κατασκευάσει ασκήσεις στις τριγωνομετρικές εξισώσεις με αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας;

Αρχίζουμε από απλή εφαρμογή του τύπου

πχ.

- $\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \ \kappa \in \mathbb{Z}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \ \kappa \in \mathbb{Z}$

- $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ εδώ απαιτείται από εμάς να γνωρίζουμε ότι $\frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{4}$

- Η πιο πανω μπορεί να δυσκολέψει λίγο ακόμα αν χρειαστεί να λύσουμε ως προς ημx

πχ. Να λυθεί η $2\eta\mu x - \sqrt{2} = 0$

- Μια «πονηρή» είναι η π.χ $\eta\mu x = 3$.Επειδή για κάθε x γνωρίζουμε ότι ισχύει $-1 \le \eta\mu x \le 1$ αναγνωρίζουμε άμεσα ότι είναι αδύνατη.

- Γνωρίζουμε ότι $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή β=0 .Μπορεί λοιπόν να δούμε μια τριγωνομετρική εξίσωση

$$(1 - \eta\mu x)\left(2\eta\mu x - \sqrt{3}\right) = 0$$

- Επίσης μια δευτεροβάθμια που άγνωστος είναι το ημω. (τον άγνωστο μπορούμε να τον ονομάσουμε χ, ω ότι θέλουμε)

$$2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0$$

- Η πιο πάνω γίνεται ποιο δύσκολη (αφού φαίνεται σαν να έχουμε δύο αγνώστους) αν δοθεί ως :

$$-2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu\omega + 1 = 0$$

Εδώ με βάση την γνωστή ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ πρέπει αρχικά να αντικαταστήσουμε το $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$ να κάνουμε πράξεις και να συνεχίσουμε όπως στην προηγούμενη.

- Να λυθεί η $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Εδώ η κυρίως δυσκολία είναι να «δείς» όλο το $\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ σαν το x του τύπου:

$$\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \ \kappa \in \mathbb{Z} \\ \acute{\eta} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}, \ \kappa \in \mathbb{Z} \\ \acute{\eta} \\ 2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}, \ \kappa \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2x = 2\kappa\pi + \dfrac{2\pi}{12} - \dfrac{3\pi}{12}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ ή \\ 2x = 2\kappa\pi + \dfrac{12\pi}{12} - \dfrac{2\pi}{12} - \dfrac{3\pi}{12}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{12}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ ή \\ 2x = 2\kappa\pi + \dfrac{7\pi}{12}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = \kappa\pi - \dfrac{\pi}{24}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ ή \\ x = \kappa\pi + \dfrac{7\pi}{24}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Θα μπορούσαμε ίσως να γράψουμε πιο γενικά τον τύπο λύσεων αντί του

$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta$ **ή** $x = 2\kappa\pi + \theta,\ \kappa \in \mathbb{Z}$ ως

$$ημ \bigcirc = ημ \square \Leftrightarrow \bigcirc = 2κπ + \square \quad \textbf{ή} \quad \bigcirc = 2κπ + π - \square$$

όπου στην μέσα στον κύκλο και μέσα στο ορθογώνιο μπορεί να μπεί οποιαδήποτε παράσταση και φυσικά το κ ακέραιος.

- Να λυθεί η $\eta\mu\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + x + \dfrac{\pi}{3} \\ ή \\ 2x + \dfrac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \end{array} \right. \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2x - x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} \\ ή \\ 2x = 2\kappa\pi + \pi - x - \dfrac{\pi}{3} \end{array} \right., \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\left\langle \begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \dfrac{4\pi}{12} - \dfrac{3\pi}{12} \\ ή \\ 2x + x = 2\kappa\pi + \dfrac{3\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} \end{array} \right., \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{12} \\ ή \\ 3x = 2\kappa\pi + \dfrac{2\pi}{3} \end{array} \right., \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{12} \\ ή \\ x = \dfrac{2\kappa\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{9} \end{array} \right., \kappa \in \mathbb{Z}$$

- Να λυθεί η $\eta\mu\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu(2x)$

Εδώ υπάρχει το πρόβλημα ότι στο 2ο μέλος δεν έχουμε ημ. Πρέπει να θυμηθούμε ότι οι συμπληρωματικές γωνίες έχουν ετερώνυμους τριγωνομετρικούς αριθμούς, οπότε $\sigma\upsilon\nu(2x) = \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$ και η εξίσωση γίνεται

$\eta\mu\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$ και λύνουμε κατά τα γνωστά

Φυσικά θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\eta\mu\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2x\right)\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{2}-\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sigma\upsilon\nu\left(2x\right)$$

Θα βρίσκαμε τις ίδιες λύσεις.

● Τέλος μπορεί να μην ζητούνται όλες οι λύσεις αλλά αυτές που βρίσκονται σε ένα δοσμένο διάστημα.Μια τέτοια άσκηση είναι η Β3 του σχολικού.Λύνουμε την ανίσωση που σχηματίζεται ως προς κ, και λαμβάνουμε υπόψη ότι το κ είναι ακέραιος .

Εδώ τελειώνει αυτό το πανόραμα τριγωνομετρικών εξισώσεων που ελπίζω να ήταν απολαυστικό....