■ $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ ■ $\varepsilon\phi\omega\cdot\sigma\phi\omega=1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\omega=\frac{1}{\sigma\phi\omega}$ ■ $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{1}{1+\varepsilon\phi^2\omega}$

$\eta\mu^2\omega=1-\sigma\upsilon\nu^2\omega$ ■ $\eta\mu^2\omega=\frac{\varepsilon\phi^2\omega}{1+\varepsilon\phi^2\omega}$

$\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\eta\mu^2\omega$

Προτεινόμενη δραστηριότητα

α) Υπάρχει γωνία ϑ με $\eta\mu\theta=\frac{1}{4}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{3}{4}$;

β) Υπάρχει γωνία ϑ με $\eta\mu\theta=\frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=-\frac{4}{5}$;

Αν όχι, αιτιολογήστε.

Αν ναι, να σχεδιάσετε μια τέτοια γωνία πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Πόσες τέτοιες γωνίες μεταξύ 0° και 360° υπάρχουν;

Απάντηση

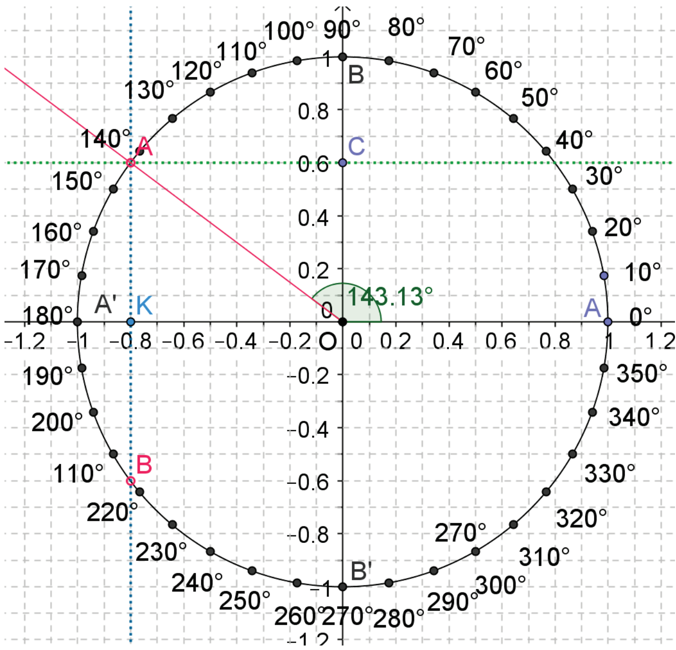
α) Επειδή $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$, αν υποθέσουμε ότι

$\eta\mu\theta=\frac{1}{4}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{3}{4}$, τότε θα ισχύει $\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{1}{16}+\frac{9}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{10}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{5}{8}=1$ που είναι άτοπο.

β) Επειδή $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$, αν υποθέσουμε ότι

$\eta\mu\theta=\frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=-\frac{4}{5}$, τότε θα ισχύει $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1 \Leftrightarrow \frac{25}{25}=1$ που είναι αληθής.Αρα υπάρχει τέτοια τιμή του θ.

- $\sigma\upsilon\nu\theta=-\frac{4}{5}=-\frac{8}{10}$. Αρα στο σημείο Κ(-0,8,0) φέρνουμε κάθετη που τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο σε δύο σημεία.Επειδή το ημίτονο είναι θετικό κρατάμε το Α που είναι το σημείο που η τελική πλευρά της ζητούμενης γωνίας τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο



- Υπάρχει μόνο μια τέτοια γωνία μεταξύ 0° και 360°

ΤΡΟΠΟΙ (Μέθοδοι) ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ

1ος τρόπος: Ξεκινάμε από το ένα μέλος (αυτό που έχει περισσότερες πράξεις) και φτάνουμε στο άλλο.

2ος τρόπος: Προχωράμε με ισοδυναμίες και καταλήγουμε (φθάνουμε) σε έναν λογικά ισοδύναμο ισχυρισμό που φανερά είναι αληθής.Ετσι συμπεραίνουμε ότι και ο αρχικός ισοδύναμος ισχυρισμός είναι αληθής.

Α10. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$$

Λύση:

Η παράσταση ορίζεται γαι

1ο τρόπος

$$\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha=(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha \text{ που ισχύει}$$

2ος τρόπος

$$\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{\eta\mu\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)}=\frac{\eta\mu\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{\eta\mu\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\eta\mu^2\alpha}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$$

Α11. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}=\frac{2}{\eta\mu\theta}$$

Λύση:

$$\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu^2\theta}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta}+\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu^2\theta+(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta}$$

$$=\frac{\eta\mu^2\theta+1+2\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta+1+2\sigma\upsilon\nu\theta}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta}=\frac{1+1+2\sigma\upsilon\nu\theta}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta}=\frac{2+2\sigma\upsilon\nu\theta}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta}$$

$$=\frac{2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta}=\frac{2}{\eta\mu\theta}$$

Α12. Να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=\varepsilon\varphi^2\alpha\cdot\eta\mu^2\alpha$$

Λύση:

1ος τρόπος (σχολικό)

$$\varepsilon\varphi^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-\eta\mu^2\alpha=\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-\frac{\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=$$

$$\frac{\eta\mu^2\alpha\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{\eta\mu^2\alpha\cdot\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\left(\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)^2\eta\mu^2\alpha=\varepsilon\varphi^2\alpha\eta\mu^2\alpha$$

2ος τρόπος

$$\varepsilon\varphi^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=\varepsilon\varphi^2\alpha\left(1-\frac{\eta\mu^2\alpha}{\varepsilon\varphi^2\alpha}\right)=\varepsilon\varphi^2\alpha\left(1-\frac{\eta\mu^2\alpha}{\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}\right)=\varepsilon\varphi^2\alpha\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)=\varepsilon\varphi^2\alpha\eta\mu^2\alpha$$

1ος τρόπος σχολικό αντικατάσταση του $\varepsilon\varphi^2\alpha$.Θα μπορούσε κάποιος να πεί γιατί το κάνει αφού εμφανίζεται και στο 3ο μέλος.

2ος τρόπος βγάζω παράγοντα το $\varepsilon\varphi^2\alpha$

Α13. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x}+\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x}=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

Υπόδειξη: Από το 1ο μέλος και αντικαθιστώ εφx και σφx.Προσοχή ότι οι παρονομαστές είναι αντίθετοι και πρέπει να αλλάξω το πρόσημο για να γίνουν ομόνυμα.