Τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικών αριθμών

Αρχικά υπενθυμίζουμε τον ορισμό της συνάρτησης που είχαμε μάθει πέρυσι

▶Συμπληρώστε τα κενά με κάποια από τις λέξεις:

διαδικασία - σύνολο – πεδίο ορισμού--κάθε –σύνολο-συνόλου-αντιστοιχίζεται- συνόλου- ακριβώς

Συνάρτηση από ένα .... A σε ένα .... B λέγεται μια .... (κανόνας) με την οποία .... στοιχείο του .... A .... σε ένα .... στοιχείο του .... B.
Μια συνάρτηση παριστάνεται συνήθως με το γράμμα ..... από την λέξη ....αλλά επίσης και με τα γράμματα g, h κ.λ.π. ή μπορεί να βάζουμε και δείκτες (subscripts) g_1, g_2, g_3 κλπ.

▶Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω φράσεις της θεωρίας:

τιμή – πεδίο – ανεξάρτητη- B--ορισμού- x--εξαρτημένη-ίσον- A--σύνολο τιμών-- $f(x)$

Το σύνολο A λέγεται .... ορισμού ή σύνολο....................

Αν με την συνάρτηση f το $x \in$...... αντιστοιχίζεται στο $y \in$......, τότε γράφουμε $y =$...... και διαβάζουμε «ψί .... έφ του χί». Το $f(x)$ λέγεται τότε .... της f στο .....

Το γράμμα x ονομάζεται .... μεταβλητή ενω το y ονομάζεται .... μεταβλητή.

Όπως γνωρίζουμε, για κάθε γωνία x υπάρχει **μία μόνο** τιμή του ημx, με -1 ≤ ημx ≤ 1.

Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση με την οποία **κάθε γωνία x αντιστοιχίζεται στο ημίτονό της.**

- Η συνάρτηση με την οποία **κάθε πραγματικός** αριθμός **x** αντιστοιχίζεται στο **ημ (x rad)** λέγεται **συνάρτηση ημίτονο** και συμβολίζεται με **ημ**.

Ορίζουμε δηλαδή ότι

ημx = ημ (x rad).

πχ. $\frac{\pi}{6} \longrightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \eta\mu\frac{\pi}{4}$

$\frac{2\pi}{3} \longrightarrow \eta\mu\frac{2\pi}{3} =$

Σημείωση: Διαφαίνεται νομίζω πλέον για πιό λόγο έγινε αυτή η προσπάθεια να ορίσουμε εκτός από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας, γωνίες θετικές οσοδήποτε μεγάλες και ακόμα γωνίες αρνητικές οσοδήποτε μικρές καθώς και τριγωνομετρικούς αριθμούς γι αυτές. Σκοπός μας λοιπόν ήταν να μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση ημx σε όλο το R ούτως ώστε να μπορούμε να κάνουμε πράξεις με άλλες συναρτήσεις χωρίς περιορισμούς.

►Συμπληρώστε τα κενά

πραγματικός—συνημίτονο--συνάρτηση

- Η .... με την οποία **κάθε ....** αριθμός x αντιστοιχίζεται στο συν (x .....) λέγεται συνάρτηση .... και συμβολίζεται με συν.

Ορίζουμε δηλαδή ότι

συνx = συν (x rad) *(δές και ΣΗΜΕΙΩΣΗ του σχολικού βιβλίου σ. 56 στο κεφάλαιο Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών)*

►Φυσικά παρόμοια μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση εφx.

Ομως ΠΡΟΣΟΧΗ! εδώ το πεδίο ορισμού δεν είναι όλο το $\mathbb{R}$!

Ορίσαμε $\varepsilon\varphi x=\frac{y}{x}$, οπότε η εφx **<u>δεν</u>** ορίζεται για τις γωνίες που η <u>τελική τους πλευρά</u> είναι ο ημιάξονας Oy’ ή ο ημιάξονας Oy και επομένως τέμνει τον τριγωνομετρικο κύκλο στα σημεία (0,-1) και (0, -1) αντίστοιχα.Αυτές οι γωνίες είναι οι $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $k\in\mathbb{R}$ και $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{R}$.Οι δύο αυτοί τύποι συνοψίζονται σε έναν τον $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{R}$.

Επομένως: $D_{\varepsilon\varphi x}=\mathbb{R}$ $\qquad\qquad\mathbb{Z}$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

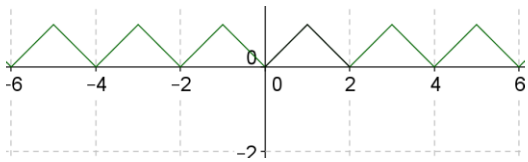
Μία συνάρτηση f με <u>πεδίο ορισμού το A</u> λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός T > 0 τέτοιος, ώστε για κάθε x ∈ A να ισχύει:

i) x + T ∈ A, x − T ∈ A

και

ii) f (x + T) = f (x − T) = f(x)

Παράδειγμα γραφικής παράστασης περιοδικής συνάρτησης με περίοδο ..... (συμπληρώστε)



Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

Προφανώς όταν το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$ η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται πάντοτε.

►Αφού η ημx έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\eta\mu(2k\pi+x)=\eta\mu x$ (γωνίες με την ίδια τελική πλευρά έχουν ίδια ημίτονα.

Για $k=1$ $\eta\mu(2\pi+x)=\eta\mu x\Leftrightarrow\eta\mu(x+2\pi)=\eta\mu x$

Για $k=-1$ $\eta\mu(-2\pi+x)=\eta\mu x\Leftrightarrow\eta\mu(x-2\pi)=\eta\mu x$

Αρα τελικά $\eta\mu(x+2\pi)=\eta\mu(x-2\pi)=\eta\mu x$.

Συμπεραίνουμε σύμφωνα με τον ορισμό ότι η συνάρτηση ημx είναι περιοδική με περίοδο 2π.

Παρόμοια και η συνάρτηση συνx είναι περιοδική με περίοδο 2π.