Μελέτη της συνάρτησης f(x) = ημx

Η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$

Μία συνάρτηση f με <u>πεδίο ορισμού το A</u> λέγεται **περιοδική**, όταν:

Υπάρχει πραγματικός αριθμός T > 0 τέτοιος, ώστε για κάθε x ∈ A να ισχύει:

i) x + T ∈ A, x − T ∈ A

και

ii) f (x + T) = f (x − T) = f(x)

• Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

►Αφού η ημx έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ καθώς και $x - 2\pi \in \mathbb{R}$.

Αρα η πρώτη συνθήκη του ορισμού της περιοδικής συνάρτησης ικανοποιείται.

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\eta\mu(2k\pi + x) = \eta\mu x$, $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}$ *(γωνίες με την ίδια τελική πλευρά έχουν ίδια ημίτονα.)*

Για $k = 1$: $\eta\mu(2\pi + x) = \eta\mu x \overset{\alpha+\beta=\beta+\alpha}{\Leftrightarrow} \eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu x$

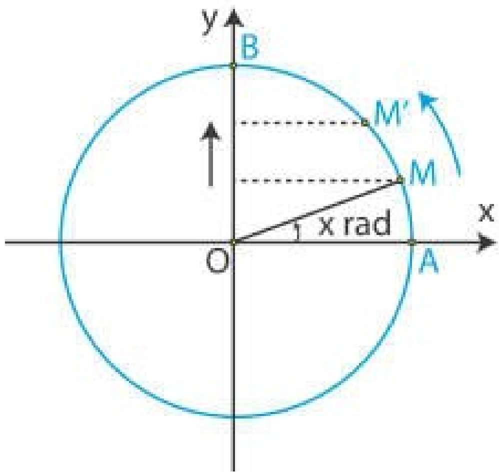
Για $k = -1$: $\eta\mu(-2\pi + x) = \eta\mu x \overset{\alpha+\beta=\beta+\alpha}{\Leftrightarrow} \eta\mu(x - 2\pi) = \eta\mu x$

Αρα τελικά $\eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu(x - 2\pi) = \eta\mu x$.

Συμπεραίνουμε σύμφωνα με τον ορισμό ότι η συνάρτηση ημx είναι περιοδική με περίοδο 2π.

►Συμπληρώστε τα κενά με κάποια από τις παρακάτω λέξεις

περιφέρεται--τριγωνομετρικό—θετική--τεταγμένη –τελική



Επειδή η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π, π.χ. το [0, 2π], Έχουμε αναφέρει όμως ότι το ημx είναι η .... του σημείου M στο οποίο η .... πλευρά της γωνίας xrad τέμνει τον .... κύκλο. Επομένως αρκεί να εξετάσουμε πώς μεταβάλλεται η τεταγμένη του M, όταν αυτό .... στον τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη .... φορά, ξεκινώντας από το A.

Παρατηρούμε ότι:

● Όταν το x μεταβάλλεται από το 0 μέχρι το $\frac{\pi}{2}$, το M κινείται από το A μέχρι το B. Άρα η τεταγμένη του αυξάνει, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) = ημx είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι η συνάρτηση f(x) = ημx είναι:

- γνησίως .... στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$,

- γνησίως .... στο διάστημα $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

● Η συνάρτηση παρουσιάζει

- μέγιστο για x = $\frac{\pi}{2}$, το $\eta\mu\frac{\pi}{2}$ = ... και

- ελάχιστο για x = ... , το ημ...... = ...

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται ως εξής:

x	0 $\qquad\frac{\pi}{2}\qquad\pi\qquad\frac{3\pi}{2}\qquad 2\pi$
ημx	

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης χρειαζόμαστε έναν πίνακα τιμών της. Κατά τα γνωστά έχουμε:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ημx		$\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq$