

Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \text{συν}x$ (version 9-12-2016)

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$

► Αφού η $\text{συν}x$ έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ καθώς και $x - 2\pi \in \mathbb{R}$.

Αρα η πρώτη συνθήκη του ορισμού της περιοδικής συνάρτησης ικανοποιείται.

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\text{συν}(2k\pi + x) = \text{συν}x$, $k \in \mathbb{Z}$ (γωνίες με την ίδια τελική πλευρά έχουν ίδια ημίτονα.)

$$\text{Για } k = 1: \quad \text{συν}(2\pi + x) = \text{συν}x \stackrel{\alpha+\beta=\beta+\alpha}{\Leftrightarrow} \text{συν}(x + 2\pi) = \text{συν}x$$

$$\text{Για } k = -1: \quad \text{συν}(-2\pi + x) = \text{συν}x \stackrel{\alpha+\beta=\beta+\alpha}{\Leftrightarrow} \text{συν}(x - 2\pi) = \text{συν}x$$

Αρα τελικά $\text{συν}(x + 2\pi) = \text{συν}(x - 2\pi) = \text{συν}x$.

Συμπεραίνουμε σύμφωνα με τον ορισμό ότι η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π .

► Συμπληρώστε τα κενά με κάποια από τις παρακάτω λέξεις:

περιφέρεται—τριγωνομετρικό—θετική--τετμημένη -2π--τελική--περιοδική

Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x$ είναι με περίοδο, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π , π.χ. το $[0, 2\pi]$.

Έχουμε αναφέρει όμως ότι το $\text{συν}x$ είναι η του σημείου M στο οποίο η πλευρά της γωνίας x rad τέμνει τον κύκλο. Επομένως αρκεί να εξετάσουμε πώς μεταβάλλεται η τετμημένη του M , όταν αυτό στον τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη φορά, ξεκινώντας από το A .

Παρατηρούμε ότι:

• Όταν το x μεταβάλλεται από το 0 μέχρι το π , το M κινείται από το A μέχρι το B . Άρα η τετμημένη του μειώνεται, που σημαίνει ότι η συνάρτηση

$f(x) = \text{συν}x$ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[0, \pi]$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x$ είναι:

- γνησίως στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$,

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A

λέγεται **περιοδική**, όταν:

Υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

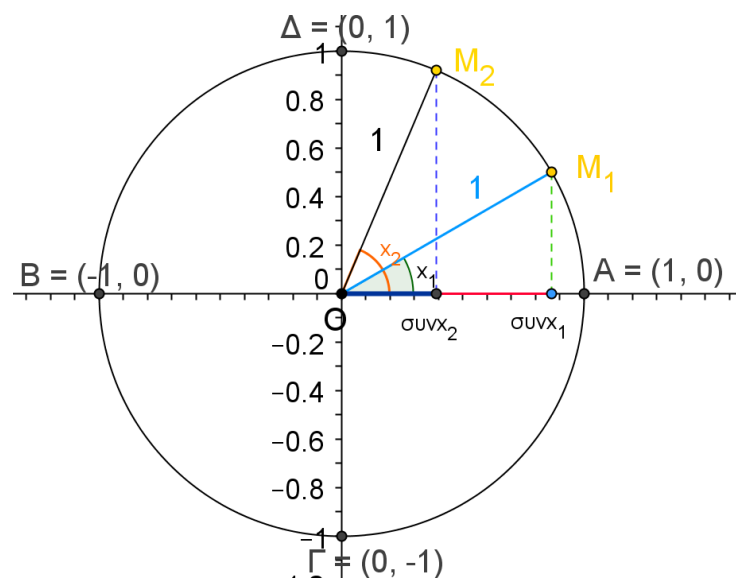
i) $x + T \in A$, $x - T \in A$

και

ii) $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

• Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται

περίοδος της συνάρτησης f .



ΑΚΡΟΤΑΤΑ

• Η συνάρτηση παρουσιάζει

- μέγιστο για $x = 0$, το $\text{συν}0 = \dots$ καθώς και για $x = 2\pi$ το $\text{συν}2\pi = \dots$

- ελάχιστο για $x = \dots$, το $\text{συν} \dots = \dots$

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται ως εξής:

x	0	π	2π
συνx			

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

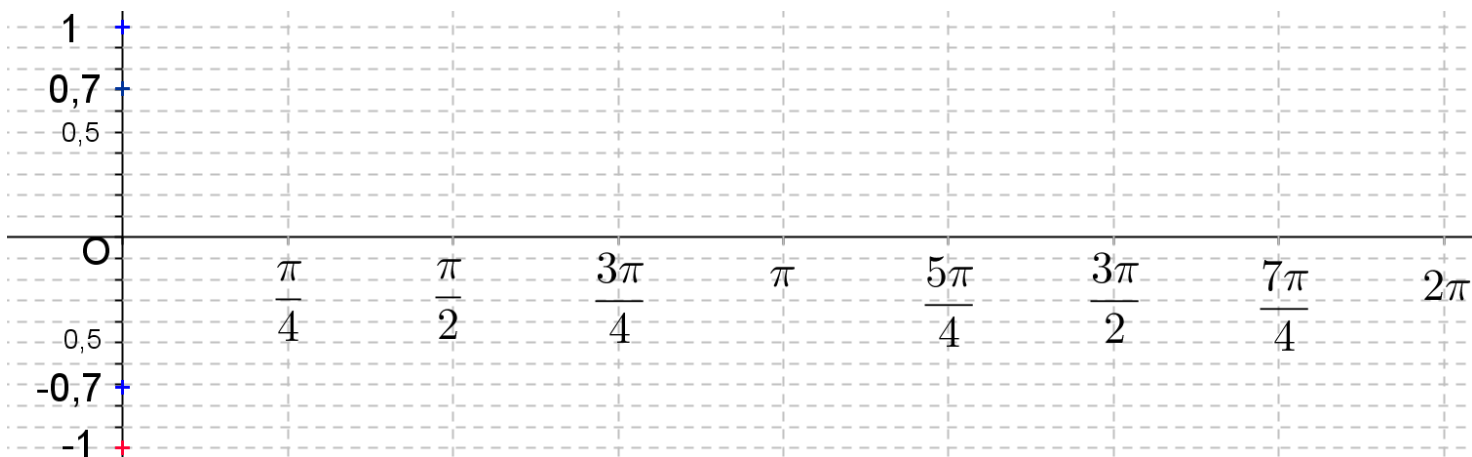
Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης χρειαζόμαστε έναν πίνακα τιμών της. Κατά τα γνωστά έχουμε:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
συνx		$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx$							

α) Παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα **ζεύγη** αυτά των αντίστοιχων τιμών και

β) τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή.

Έτσι προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης **συνημίτονο** στο διάστημα $[0, 2\pi]$:



• Πιο κάτω φαίνεται η γραφική παράσταση σε ευρύτερο διάστημα και τονίζεται ότι είναι περιοδική περιόδου 2π .

