Μελέτη της συνάρτησης f(x) = εφx *(version 17-12-2016)*

▶ Αρχικά θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο **π.**

Γι’ αυτό πρέπει να δείξουμε ότι <u>για κάθε</u> $x \in D_{\varepsilon\varphi x} = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ ισχύουν:

i) $x - \pi \in D_{\varepsilon\varphi x}$ **και** $x + \pi \in D_{\varepsilon\varphi x}$ που διαπιστώνεται εύκολα αφού τα $k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ διαφέρουν διαδοχικά κατά π.

ii) $\varepsilon\varphi(x+\pi) = \varepsilon\varphi(x-\pi) = \varepsilon\varphi x$

- Οι γωνίες που διαφέρουν κατά **π** έχουν **ίδιες** εφαπτομένες. Αρα $\varepsilon\varphi(x+\pi) = \varepsilon\varphi x$.
- Γνωρίζουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν αντίθετες εφαπτομένες άρα $\varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x$

Επίσης οι αντίθετες γωνίες έχουν αντίθετες εφαπτομένες άρα:

$$\varepsilon\varphi(x-\pi) = \varepsilon\varphi[-(\pi - x)] \overset{\text{Οι αντίθετες γωνίες έχουν αντίθετες εφαπτομένες}}{=} -\varepsilon\varphi(\pi - x) \overset{\text{Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν αντίθετες εφαπτομένες}}{=} -(-\varepsilon\varphi x) = \varepsilon\varphi x.$$

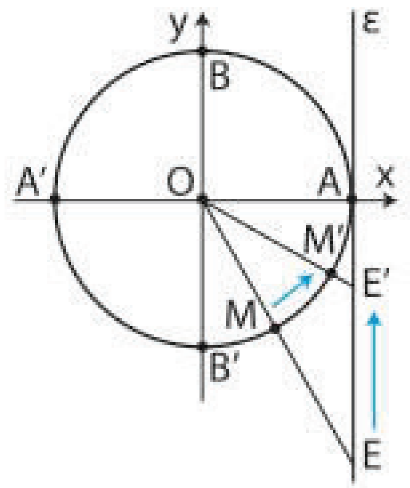
▶ Συμπληρώστε τα κενά με κάποια από τις παρακάτω λέξεις:

αυξάνει—εφαπτομένων—θετική—τεταγμένη—τελική—άξονα.

Επειδή όπως δείξαμε πιο πάνω, η συνάρτηση f(x) = εφx είναι περιοδική με περίοδο **π**, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους **π**, π.χ. το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Έχουμε αναφέρει όμως ότι το εφx είναι η .... του σημείου Ε στο οποίο η .... πλευρά της γωνίας x*rad* τέμνει τον ....των ....

Ας υποθέσουμε ότι η τελική πλευρά της γωνίας xrad τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ.



- Όταν το **x** παίρνει τιμές από το $-\frac{\pi}{2}$ μέχρι το $\frac{\pi}{2}$, το Μ κινείται στον τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη .... φορά από το Β′ μέχρι το Β, οπότε η τεταγμένη του σημείου Ε ....Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) = εφx είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Η συνάρτηση αφού είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, δεν παρουσιάζει σε αυτό, ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστα.

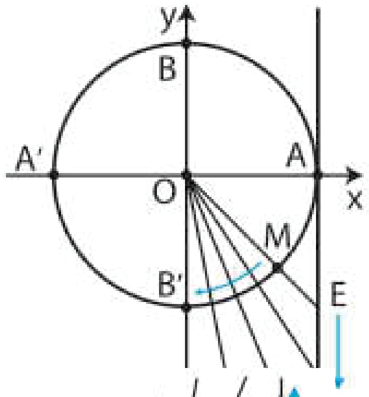
● Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται ως εξής:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
εφx		

Θα δείτε στην Γ Λυκείου τον συμβολισμό:

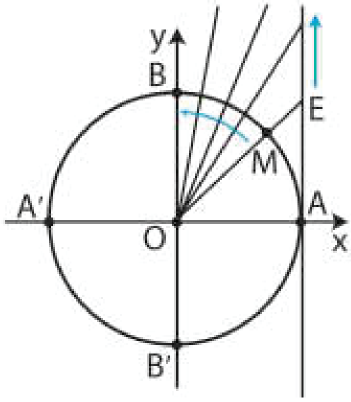
$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^{+}} \varepsilon\varphi x = -\infty$$

● Όταν ο x «τείνει» στο $-\frac{\pi}{2}$ από <u>μεγαλύτερες</u> τιμές η εφx ***«τείνει»*** στο $-\infty$.



Γι' αυτό λέμε ότι η ευθεία $x=-\frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f. *Συμβολισμό* $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^{+}} \varepsilon\varphi x = -\infty$

● Επίσης όταν ο x «τείνει» στο $\frac{\pi}{2}$ από <u>μικρότερες</u> τιμές η εφx «τείνει» στο $+\infty$. *Θα δείτε στην Γ Λυκείου τον συμβολισμό:* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^{-}} \varepsilon\varphi x = +\infty$



Γι' αυτό λέμε ότι και η ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

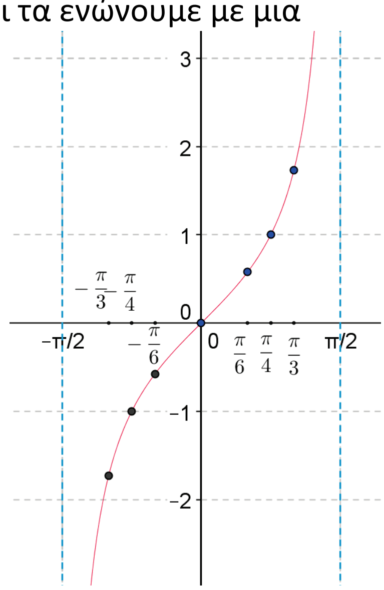
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=εφx χρειαζόμαστε έναν πίνακα τιμών της. Κατά τα γνωστά έχουμε:

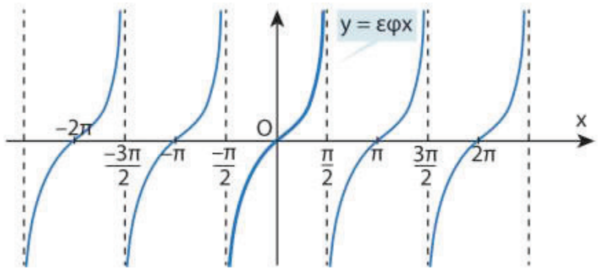
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
εφx									

Παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη αυτά των αντίστοιχων τιμών και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή.

Έτσι προκύπτει η διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης εφαπτομένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:



● Η γραφική παράσταση της f(x)=εφx, $x\in\mathbb{R}$, δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Είναι φανερό ότι η γραφική παράσταση της f(x) = εφx έχει **κέντρο συμμετρίας** το Ο, που είναι αναμενόμενο αφού εφ(-x) = -εφx, οπότε πρόκειται για **περιττή** συνάρτηση.